Digitale Infomappe für Lehrkräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2025

Sehr geehrte Lehrkraft,

in dieser digitalen Infomappe finden Sie neben den Ausstellungsplakaten der Langen Nacht der Mathematik spannende Knobelaufgaben für Ihren Unterricht sowie Informationen zu unserem Veranstaltungsangebot für Schülerinnen und Schüler.

Wir wünschen Ihnen viel Freude mit dem Informationspaket.

Bei Fragen oder Anregungen kommen Sie gerne auf uns zu.

Herzliche Grüße
Ihr Fachbereich Mathematik

Ihre Ansprechpartnerinnen:

Cornelia Seeberg, Studienkoordinatorin: seeberg@mathematik.tu-darmstadt.de
Birgitt Simon: oeffentlichkeitsarbeit@mathematik.tu-darmstadt.de

Inhalt

Angebote des Fachbereichs Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2024

immer Anfang Februar	**Lange Nacht der Mathematik** Schüler:innen, Lehrer:innen, Eltern und alle, die sich für Mathematik begeistern, können die Faszination der Mathematik mit einem interessanten Vortrag, spannenden Exponaten, Knobeleien und Einblicken in Studium und Forschung am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt erleben. www.mathematik.tu-darmstadt.de/lnm
15. März 2025 **09:00 – 15:00 Uhr**	**Tag der Mathematik** In Zusammenarbeit mit dem Zentrum für Mathematik e.V. richten wir den Tag der Mathematik aus. Schülerinnen und Schüler der 12. Jahrgangsstufe können in spannenden Einzel- und Gruppenwettbewerben tolle Preise gewinnen. **Anmeldung bis 24.2.2024** https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/tdm
03. April 2025 **mit Anmeldung**	**Girls‘ Day** Am Girls‘ Day können Schülerinnen die naturwissenschaftlichen, technischen, handwerklichen, ingenieurwissenschaftlichen und IT-Bereiche der TU Darmstadt besuchen. Es warten zahlreiche Labors und Werkstätten in unterschiedlichen Fachbereichen auf neugierige und begeisterungsfähige Schülerinnen https://www.mathematik.tudarm-stadt.de/studium/studieninteressierte/entscheidungshilfen/girl_s_day/girl_s_day.de.jsp

ab 28.04.2025
immer Mo 16:30-18:00 Uhr

Mathezirkel

Der Mathezirkel ist eine Vorlesungsreihe für Schüler*innen ab der 10. Klasse. Jedes Semester vermitteln unsere Mathematikerinnen und Mathematiker spannende Themen aus der Mathematik in abwechslungsreichen Vorlesungen.
www.mathematik.tu-darmstadt.de/mathezirkel

---

20. Mai 2025
09.00-13.00 Uhr

hobit contact – Was will ich mal werden?

Bei dieser Frage versuchen die TU Darmstadt und weitere Kooperationspartner Schüler*innen bei der Suche nach einer Antwort zu unterstützen.
Campus Stadtmitte Karo 5
www.hobit.de, www.mathematik.tu-darmstadt.de/hobit

Herbst 2025

Schüler*innennachmittag

Der Fachbereich Mathematik führt regelmäßig Schüler*innen nachmittage zur Mathematik durch, die Schülerinnen und Schülern (ab Klassenstufe 10) einen Einblick in die Vielfalt der modernen Mathematik liefern.
https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/schuelernachmittag

Laufend

Math on Demand/Schulbesuch

Wir kommen an Ihre Schule oder stellen ein spannendes Programm für Ihre Klasse an unserem Fachbereich zusammen mit einem mathematischen Vortrag, Informationen zum Studium und Austauschmöglichkeiten mit Studierenden.
Einzelne Vorträge sind bereits ab der Mittelstufe geeignet.
www.mathematik.tu-darmstadt.de/math-on-demand

---

laufend

Weitere Informationen...

für Schüler*innen, Studieninteressierte, Lehrkräfte und Mathe-Interessierte finden Sie unter www.mathematik.tu-darmstadt.de/studieninteressierte.

Bei Fragen zu unserem Angebot wenden Sie sich gerne an die Studienkoordinatorin Cornelia Seeberg (seeberg@mathematik.tu-darmstadt.de) oder an die Referentin Öffentlichkeitsarbeit Nathalie Becker (oeffentlichkeitsarbeit@mathematik.tu-darmstadt.de).

Information über Studienmöglichkeiten/Einschreibung
www.tu-darmstadt.de/studieren

hobit – Schülermesse Hochschul- und Berufsinfotage
www.hobit.de

TUDay – Infotag für Studieninteressierte
www.tu-day.de

Kann ich MINT?
www.zsb.tu-darmstadt.de/erlebe-mint

Studi für 1 Tag
www.zsb.tu-darmstadt.de/studierende-begleiten

Onlinehilfe zur Studienwahl
www.self-assessment.tu-darmstadt.de

Vorlesungsverzeichnis
www.tucan.tu-darmstadt.de

Internationale Bewerbungen
www.tu-darmstadt.de/international

Zentrale Studienberatung und -orientierung ZSB

- Veranstaltungen zum Studienangebot, zur Studienwahl und Karriereplanung
- Individuelle Studienorientierung
- Entscheidungsfindung im persönlichen Gespräch
- Zielgerichtete Studienplanung

Karolinenplatz 5, 64289 Darmstadt
Gebäude S1 | 01
E-Mail info@zsb.tu-darmstadt.de

Sprechstunden: www.zsb.tu-darmstadt.de

Impressum

Herausgeber Die Präsidentin der TU Darmstadt
Redaktion Zentrale Studienberatung und -orientierung ZSB

Design: DUBBEL SPÄTH, Darmstadt | Titelfoto: Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt

Mathematik
Studienrichtung Mathematik
Bachelor of Science

Studieninformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

ZSB ZENTRALE STUDIENBERATUNG UND -ORIENTIERUNG

Bitte hier falten

Kurzbeschreibung

Der Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt bietet Ihnen ein breites Fächerangebot, vielfältige Studienrichtungen sowie ein einzigartiges Betreuungskonzept in Kleingruppen. Im Mathematikstudium an der TU Darmstadt erwerben Sie nicht nur einschlägige Fachkenntnisse in sieben verschiedenen mathematischen Disziplinen, sondern auch entscheidende Kompetenzen wie analytische Fähigkeiten und strukturelles bzw. problemlösendes Denken. Dadurch werden Sie bestens auf Ihre berufliche Zukunft vorbereitet. Mehr Info:

Cornelia Seeberg
studienberatung@mathematik.tu-darmstadt.de

www.mathematik.tu-darmstadt.de/studium

Testen Sie sich selbst:
www.self-assessment.tu-darmstadt.de/mathematik

Bewerbung

Bitte informieren Sie sich für Ihren Studiengang rechtzeitig unter

www.tu-darmstadt.de/bewerbungsfristen

Mathematik (B.Sc.) - Studienrichtung Mathematik - In-Kraft-Treten 01.06.2024

Im Studiengang müssen insgesamt 180 Credit Points (Leistungspunkte) erreicht werden:

Pflichtbereich Mathematik:	**83 CP**
Seminar/Projekt:	**5 CP**
Wahlbereich (in Summe 80 CP):	
- davon Fachlicher Bereich:	**58-61 CP**
- davon Überfachlicher Bereich:	**19-22 CP**
- davon Studium Generale:	**5 CP**
Abschlussbereich/Thesis:	**12 CP**

Den *offiziellen, verbindlichen* **Studien- und Prüfungsplan** mit mehr Informationen finden Sie in den Satzungsbeilagen der TU Darmstadt.
Hier ist im Folgenden eine *vereinfachte, exemplarische* **Modulübersicht** dargestellt:

<table>
<tr><th>1. Semester</th><th>2. Semester</th><th>3. Semester</th><th>4. Semester</th><th>5. Semester</th><th>6. Semester</th></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="3">Analysis I + II* (9 + 9 CP)
Lineare Algebra I + II* (9 + 9 CP)
Gewöhnliche Differentialgleichungen (5 CP)
Complex Analysis* (5 CP)
Einführung in die numerische Mathematik (9 CP)
Integrationstheorie (9 CP)
Einführung in die Algebra (5 CP)
Einführung in die Stochastik (9 CP)
Algorithmic Discrete Mathematics* (5 CP)</td><td colspan="2">Wahlpflichtbereich Mathematik*
(32-37 CP)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nebenfach (24-29 CP):
Chemie oder Informatik oder Mechanik oder Physik oder Wirtschaftswissenschaften; weitere Fächer auf Antrag</td></tr>
<tr><td>Seminar/Projekt*
(5 CP)</td><td rowspan="3">Bachelor-Arbeit*
(12 CP)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Überfachlicher Pflichtbereich (9 CP)
und
Überfachlicher Wahlbereich (5-8 CP)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Studium Generale (5 CP)</td></tr>
</table>

* Je nach Angebot können die gekennzeichneten Veranstaltungen in englischer Sprache belegt werden

Mathematik

Studienrichtung Wirtschaftsmathematik

Bachelor of Science

Studieninformation

Information über Studienmöglichkeiten/Einschreibung
www.tu-darmstadt.de/studieren

hobit – Schülermesse Hochschul- und Berufsinfotage
www.hobit.de

TUDay – Infotag für Studieninteressierte
www.tu-day.de

Kann ich MINT?
www.zsb.tu-darmstadt.de/erlebe-mint

Studi für 1 Tag
www.zsb.tu-darmstadt.de/studierende-begleiten

Onlinehilfe zur Studienwahl
www.self-assessment.tu-darmstadt.de

Vorlesungsverzeichnis
www.tucan.tu-darmstadt.de

Internationale Bewerbungen
www.tu-darmstadt.de/international

Zentrale Studienberatung und -orientierung ZSB

- Veranstaltungen zum Studienangebot, zur Studienwahl und Karriereplanung
- Individuelle Studienorientierung
- Entscheidungsfindung im persönlichen Gespräch
- Zielgerichtete Studienplanung

Karolinenplatz 5, 64289 Darmstadt
Gebäude S1 | 01
E-Mail info@zsb.tu-darmstadt.de

Sprechstunden: www.zsb.tu-darmstadt.de

Impressum

Herausgeber Die Präsidentin der TU Darmstadt
Redaktion Zentrale Studienberatung und -orientierung ZSB

Design: DUBBEL SPÄTH, Darmstadt | Titelfoto: Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt

Bitte hier falten

Kurzbeschreibung

Der Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt bietet Ihnen ein breites Fächerangebot, vielfältige Studienrichtungen sowie ein einzigartiges Betreuungskonzept. Während des Mathematikstudiums erwerben Sie nicht nur einschlägige Fachkenntnisse in sieben verschiedenen mathematischen Disziplinen, sondern auch entscheidende Kompetenzen wie analytische Fähigkeiten und strukturelles bzw. problemlösendes Denken. Dadurch werden Sie bestens auf Ihre berufliche Zukunft vorbereitet. Mehr Info:

Cornelia Seeberg
studienberatung@mathematik.tu-darmstadt.de

www.mathematik.tu-darmstadt.de/studium

Testen Sie sich selbst:
www.self-assessment.tu-darmstadt.de/mathematik

Bewerbung

Bitte informieren Sie sich für Ihren Studiengang rechtzeitig unter

www.tu-darmstadt.de/bewerbungsfristen

Mathematik (B.Sc.) - Studienrichtung Wirtschaftsmathematik - In-Kraft-Treten 01.06.2024

Im Studiengang müssen insgesamt 180 Credit Points (Leistungspunkte) erreicht werden:

Pflichtbereich Mathematik:	**91 CP**
Seminar/Projekt:	**5 CP**
Wahlbereich (in Summe 72 CP):	
- davon Fachlicher Bereich:	**50-53 CP**
- davon Überfachlicher Bereich:	**19-22 CP**
- davon Studium Generale:	**5 CP**
Abschlussbereich/Thesis:	**12 CP**

Den *offiziellen, verbindlichen* **Studien- und Prüfungsplan** mit mehr Informationen finden Sie in den Satzungsbeilagen der TU Darmstadt.
Hier ist im Folgenden eine *vereinfachte*, *exemplarische* **Modulübersicht** dargestellt:

1. Semester	2. Semester	3. Semester	4. Semester	5. Semester	6. Semester

Analysis I + II* (9 + 9 CP)
Lineare Algebra I + II* (9 + 9 CP)
Gewöhnliche Differentialgleichungen (5 CP)
Einführung in die numerische Mathematik (9 CP)
Integrationstheorie (9 CP)
Einführung in die Stochastik (9 CP)
Algorithmic Discrete Mathematics* (5 CP)
Einführung in die Optimierung (9 CP)
Wahrscheinlichkeitstheorie (9 CP)

Wahlpflichtbereich Mathematik*
(9-15 CP)

Nebenfächer:
Wirtschaftswissenschaften (24-30 CP)
und
Informatik (14-20 CP)

Seminar/Projekt*
(5 CP)

Bachelor-Arbeit*
(12 CP)

Überfachlicher Pflichtbereich (9 CP)
und
Überfachlicher Wahlbereich (5-8 CP)

Studium Generale (5 CP)

* Je nach Angebot können die gekennzeichneten Veranstaltungen in englischer Sprache belegt werden

Information über Studienmöglichkeiten/Einschreibung
www.tu-darmstadt.de/studieren

hobit – Schülermesse Hochschul- und Berufsinfotage
www.hobit.de

TUDay – Infotag für Studieninteressierte
www.tu-day.de

Studi für 1 Tag
www.zsb.tu-darmstadt.de/studierende-begleiten

Kann ich MINT?
www.zsb.tu-darmstadt.de/erlebe-mint

Onlinehilfe zur Studienwahl
www.self-assessment.tu-darmstadt.de

Vorlesungsverzeichnis
www.tucan.tu-darmstadt.de

Information für Studieninteressierte mit internationalen Zeugnissen bei Zulassung International
www.tu-darmstadt.de/international

Zentrum für Lehrkräftebildung
www.zfl.tu-darmstadt.de

Zentrale Studienberatung und -orientierung ZSB

- Veranstaltungen zum Studienangebot, zur Studienwahl und Karriereplanung
- Individuelle Studienorientierung
- Entscheidungsfindung im persönlichen Gespräch
- Zielgerichtete Studienplanung

Karolinenplatz 5, 64289 Darmstadt
Gebäude S1 | 01
E-Mail info@zsb.tu-darmstadt.de

Offene Sprechstunde: www.zsb.tu-darmstadt.de

Impressum

Herausgeber Die Präsidentin der TU Darmstadt
Redaktion Zentrale Studienberatung und -orientierung ZSB

Design: DUBBEL SPÄTH, Darmstadt | Titelfoto: Gregor Schuster, Darmstadt

Mathematik
Lehramt an Gymnasien

Studieninformation

Bitte hier falten

Kurzbeschreibung

Im Studiengang Lehramt an Gymnasien werden zwei Unterrichtsfächer einschließlich ihrer Didaktik und die sog. Bildungswissenschaften studiert. Hinzu kommt ein MINT-orientierter interdisziplinärer Vernetzungsbereich (**MINT**= **M**athematik, **I**nformatik, **N**aturwissenschaften, **T**echnik).

Von Anfang an ist auch eine starke Praxisorientierung dabei: Das Betriebspraktikum, das Grundpraktikum und das Praxissemester. Das Studium wird mit dem ersten Staatsexamen abgeschlossen.

www.mathematik.tu-darmstadt.de
www.zfl.tu-darmstadt.de

Bewerbung

Bitte informieren Sie sich für Ihren Studiengang rechtzeitig unter

www.tu-darmstadt.de/bewerbungsfristen

Zusammensetzung des Studiengangs Lehramt an Gymnasien (240 CP):

	Bestandteile der Fächer und der Bildungswissenschaften		
Fach 1 (90 CP)	**Fachwissenschaft (41 CP)** **Fachdidaktik (8 CP)** **Wahlpflichtbereich (28 CP)**	**Anteil am Praxissemester (8 CP)**	**Anteil am Vernetzungsbereich (5 CP)**
Fach 2 (90 CP) (hier nicht abgebildet)	Fachwissenschaft und Fachdidaktik (77 CP)	Anteil am Praxissemester (8 CP)	Anteil am Vernetzungsbereich (5 CP)
Bildungswissenschaften (60 CP) (hier nicht abgebildet)	Pflicht- und Wahlpflichtbereich (46 CP)	Anteil am Praxissemester (4 CP)	Anteil am Vernetzungsbereich (10 CP)

Fach Mathematik (Lehramt an Gymnasien): Den *offiziellen, verbindlichen* **Studien- und Prüfungsplan** mit mehr Informationen finden Sie in den Satzungsbeilagen der TU Darmstadt.
Hier ist im Folgenden eine *vereinfachte*, *exemplarische* **Modulübersicht** dargestellt:

1. Semester	**2. Semester**	**3. Semester**	**4. Semester**	**5. Semester**	**6. Semester**	**7. Semester**	**8. Semester**	**9. Semester**
Analysis I (9 CP)	**Analysis II (9 CP)**		**Einführung in die Stochastik (9 CP)**	**Geometrie (für das Lehramt) (5 CP)**	**Mathematische Ergänzungen* (14 CP)**			
Lineare Algebra (für das Lehramt) (9 CP)		**Anteil am Vernetzungsbereich (5 CP) ** **	**Fachdidaktisches Seminar (ein Modul nach Wahl) (3 CP)**		**Anteil am Praxissemester (8 CP)**			**Examen (Erste Staatsprüfung)**
	Grundlagen des Lehrens und Lernens von Mathematik (8 CP)		**Fachdidaktik und Fachwissenschaft (ein Kombimodul nach Wahl) (8 CP)**			**Fachdidaktisches Projekt (ein Modul nach Wahl) (3 CP)**		

* Es sind 14 CP aus mathematischen Ergänzungen zu belegen, die noch nicht im Kombimodul (Wahlpflichtbereich) gewählt wurden; mindestens 5 CP müssen aus anwendungsorientierten Bereichen der Mathematik stammen.

** Die Lehrveranstaltungen zum Vernetzungsbereich werden individuell im Studienverlauf belegt.

Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Berufsaussichten für Mathematiker*innen

„Weißt du was? Die meisten richtigen Mathematiker können überhaupt nicht rechnen. Außerdem ist ihnen dafür die Zeit zu schade.“
Hans Magnus Enzensberger, Der Zahlenteufel

Die Mathematik ist, wie die Dialektik, ein Organ des inneren höheren Sinnes, in der Ausübung ist sie eine Kunst… Ein durchgreifender Advokat in einer gerechten Sache, ein durchdringender Mathematiker vor dem Sternenhimmel, erscheinen beide gleich gottähnlich.

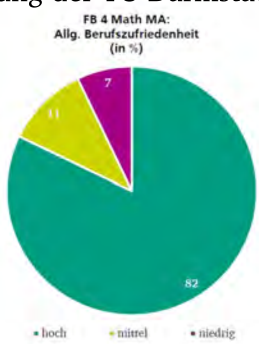
Johann Wolfgang von Goethe, Maximen und Reflexionen

Sehr gute Jobaussichten für Mathematiker

Es gibt zwar nur wenige Stellen in „typischen“ Berufsfeldern, während des Studiums werden jedoch universell einsetzbare Qualifikationen erworben, die heute stark nachgefragt sind: z.B. analytischen Fähigkeiten und ein strukturiertes Herangehen an komplexe Problemstellungen. Das wird sich auf absehbare Zeit auch nicht ändern.
Quelle: https://www.academics.de/ratgeber/mathematiker-berufsaussichten

Über 80 Prozent aller Mathe-Absolventen finden bereits innerhalb der ersten 12 Monate nach ihrem Mathestudium einen Arbeitsplatz.
Quelle: https://jobtensor.com/Studium/Mathematik

Mathematiker der TU Darmstadt benötigen im Durchschnitt 2 Monate bis sie eine erste Beschäftigung finden. 1,5 Jahre nach dem Studium sind nur 5% der Bachelor und 0% der Master auf der Suche nach einer Beschäftigung. Masterabsolventen sind zu 100 % gemäß ihrer Ausbildung beschäftigt und erhalten bei einer Vollzeitstelle durchschnittlich knapp 4000 € Gehalt.
Quelle: Absolventenbefragung der TU Darmstadt 2015/16



Quelle:Absolventenbefragung der TU Darmstadt 2015/16

Gestern Mathe, heute Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

„Mein Mathematikstudium qualifiziert mich für meinen Beruf als Softwareentwicklerin, weil Analytik, Logik und Kreativität in beiden Bereichen eine prima Voraussetzung für schöne Ergebnisse sind.“

Margrit Klitz, Softwareentwicklerin, DLR Köln

Gestern Mathe, heute Bankenaufsicht

„Mein Mathematikstudium qualifiziert mich für meinen Beruf als Bankenaufseher, weil ich komplexe Zusammenhänge und große Datenmengen schnell und effektiv analysieren und verstehen kann. Als Mathematiker bin ich gerne gehörter Ansprechpartner für alle Arten von quantitativen Fragen.“

Marcus Haas, Banken und Finanzaufsicht, Deutsche Bundesbank, Frankfurt am Main

Gestern Mathe, heute Pharma

„Mein Mathematikstudium qualifiziert mich für meinen Beruf, da es mir die im Studium erlernte strukturierte Herangehensweise an Problemstellungen ermöglicht, mich schnell in unterschiedliche Fragestellungen in meinem beruflichen Umfeld einzuarbeiten auch Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Fragestellungen zu erkennen.“

Dr. Annett Keller, Senior Biostatistician, Boehringer Ingelheim

Gestern Mathe, heute Versicherungswirtschaft

„Aufgrund meiner mathematischen Affinität bin ich als Aktuar im Bereich der betrieblichen Altersversorgung bei Willis Towers Watson, einem der weltweit führenden Beratungsunternehmen, tätig. Die Beratung erfolgt gemeinsam mit nationalen und internationalen Kundenteams und umfasst die versicherungsmathematische Betreuung, Verwaltung und strategische Gestaltung der Versorgungswerke unserer Kunden. Hierbei stellen sich vielfältige und spannende Anforderungen, die neben der mathematischen Expertise ein hohes Interesse an den arbeits- und steuerrechtlichen sowie den finanzwirtschaftlichen Rahmenbedingungen für die betriebliche Altersversorgung voraussetzen. Schwerpunkte der aktuariellen Tätigkeit sind die versicherungsmathematische Bewertungen für die Jahresabschlüsse unserer Kunden, die Migration und Harmonisierung von Bewertungsprojekten sowie die Übernahme von Projektaufgaben wie z. B. Vorgabenerstellung, Workflowdefinition und Weiterentwicklung unserer technischen Systeme.“

Tobias Bauer (Senior Manager) & Daniel Stühn (Senior Analyst), Willis Towers Watson

Gestern Mathe, heute Flugsicherung

„Mein Mathematikstudium qualifiziert mich für meinen Beruf vor allem im Bereich der Analyse und Qualitätsprüfung von Datenauswertung. Das strukturierte und logische Vorgehen, wie es in Beweisen erlernt wird, hilft hierbei den Überblick zu bewahren.“

Miriam Willms, Spezialist Luftverkehrsstatistik und Datenmanagement, DFS Deutsche Flugsicherung

Weitere Testimonials unter:

Mathezirkel

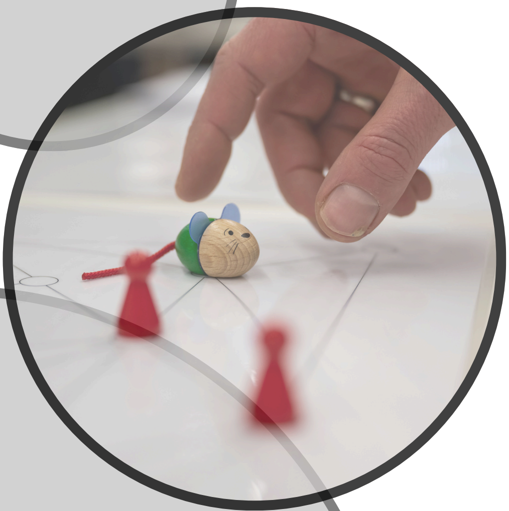
im Sommersemester 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich **Mathematik**

“Was ist Mathematik?”

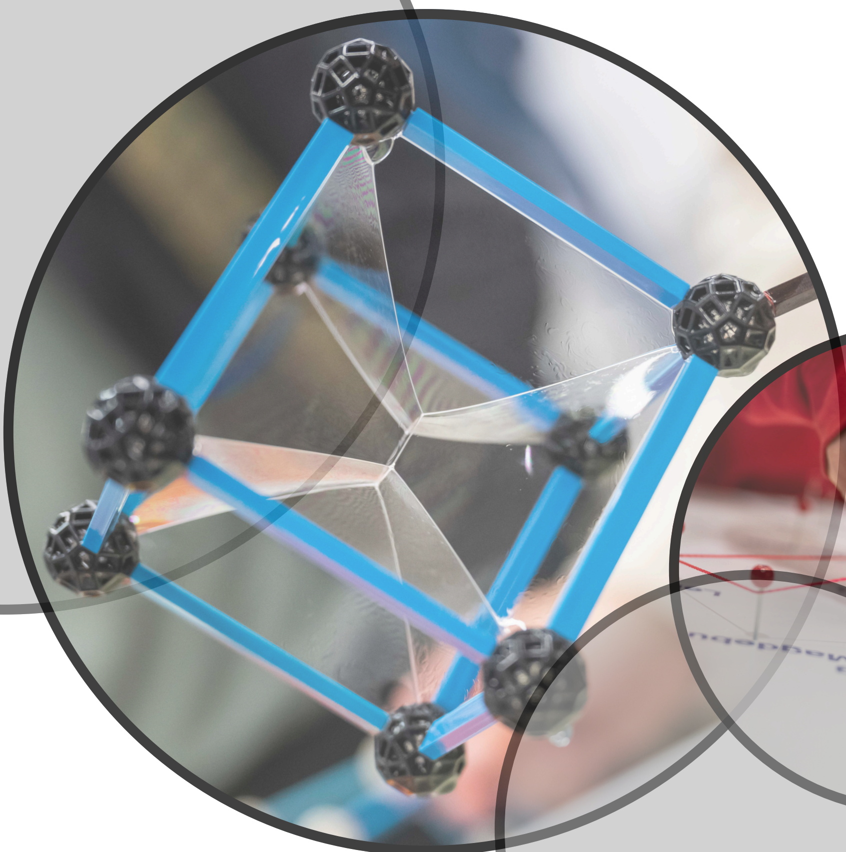
Spannende Einblicke in die Welt der Mathematik
(geeignet für Schüler:innen ab Klassenstufe 10)



Ab **28.04.2025** immer montags
von **16:30 Uhr bis 18:00 Uhr**

Schlossgartenstraße 7,
Darmstadt (S2|15 - 101)

Infos & Anmeldung

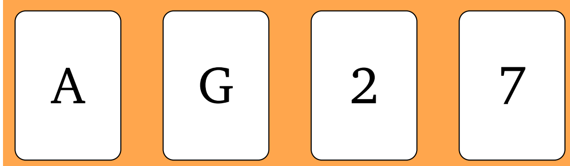


Knifflige Knobelaufgaben zur Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich **Mathematik**

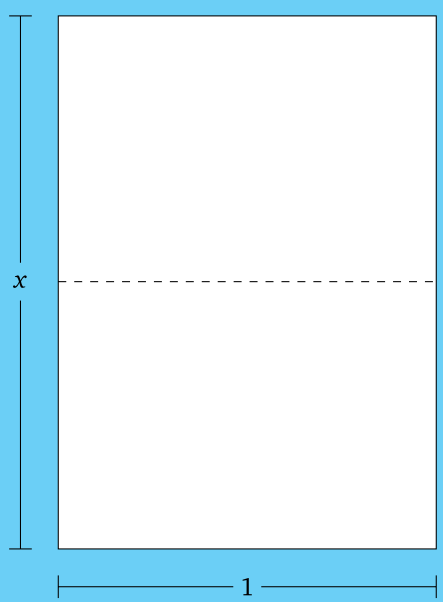
Diese"Aufgaben"sind"kein"Leistungstest!"An der Universität sieht man Mathematikaufgaben nur ganz selten direkt ihre Lösung an. Häufig muss man erst ein paar Ideen ausprobieren. Unterhalten Sie sich doch mit uns über Ihre Ideen! Wenn Sie lieber in Ruhe darüber nachdenken wollen, finden Sie die Lösungen auch unter www.mathematik.tu-darmstadt.de/studieninteressierte



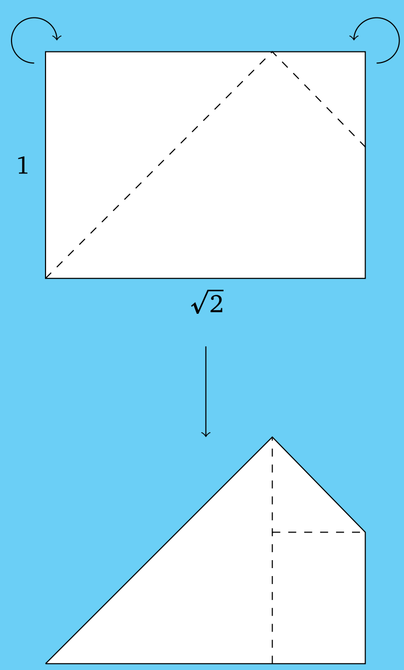
Auf dem Tisch liegen vier Karten. Bei jeder Karte steht auf der einen Seite ein Buchstabe und auf der anderen Seite eine Zahl. Wir wollen fordern, dass bei jeder Karte, bei der der Buchstabe ein Vokal ist, auf der anderen Seite eine gerade Zahl steht. Welche Karten müssen Sie umdrehen, um zu prüfen, ob die Forderung eingehalten wurde?

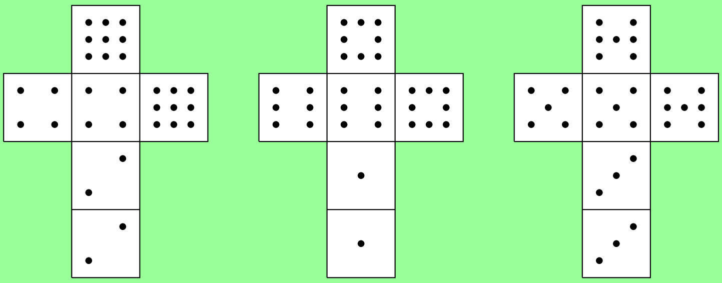
Bei der Größe von Papier ist das Längenverhältnis der Seitenkanten von großer Relevanz. So ist beispielsweise das Seitenverhältnis von DIN A4-Papier (also auch so eines, wie das, auf dem diese Aufgabe steht) so ausgelegt, dass das Längenverhältnis zwischen der kürzeren und längeren Kante erhalten bleibt, wenn man das Papier der Länge nach in der Mitte faltet.

a) Angenommen, die kürzere Seite eines DIN A4-Blattes ist $1LE$ lang. Sei x die Länge der längeren Seite. Wie muss x gewählt werden, damit das Blatt ein DIN A4-Blatt ist? (Zur Kontrolle: $x = \sqrt{2}$)



b) Bei einem DIN A4-Papier wurden zwei Ecken um 45° wie im Bild unten abgeknickt. Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur, wenn die kürzere Seite des A4-Papiers $1LE$ lang ist?





W_1 W_2 W_3

Links sind die Abwicklungen von drei Würfeln dargestellt. Zwei Spieler wählen je einen Würfel und werfen die beiden gegeneinander. Der Spieler, bei dessen Würfel die Augenzahl der nach oben zeigenden Seite höher ist, gewinnt.
Welchen Würfel sollten Sie verwenden, um sich die größte Gewinnwahrscheinlichkeit zu sichern?

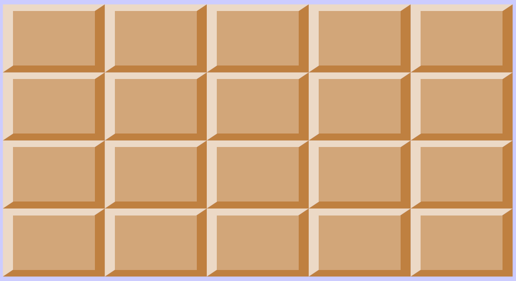
Ein Witz unter Mathematikern lautet:

> Drei Mathematiker gehen in eine Bar. Der Wirt fragt: „Für jeden ein Bier?“ Der erste Mathematiker entgegnet: „Weiß nicht.“ Der zweite Mathematiker sagt ebenfalls: „Weiß nicht.“ Darauf antwortet der dritte Mathematiker: „Ja, bitte!“

Wie kommen diese Antworten zustande?

Eine Mathematikerin ist bei einem alten Bekannten aus ihrer Schulzeit zu Besuch. Irgendwann kommen sie auf das Gesprächsthema Familie und als die Mathematikerin fragt, wie alt denn die drei Töchter des Bekannten seien, meint dieser, dass die Summe ihrer Alter seine Hausnummer ergeben und dass das Produkt ihrer Alter 72 betrage.
Die Mathematikerin überlegt und meint, dass diese Informationen nicht ausreichen. Darauf sagt der Bekannte: „Die Älteste von ihnen will auch mal Mathematik studieren.“ Das scheint Information genug zu sein, da die Mathematikerin sofort alle drei Alter ohne Fehler angeben kann.
Wie alt sind die Töchter des Bekannten?

Auf dem Tisch befindet sich eine Tafel Schokolade, die aus 5×4 Kammern besteht. Die Tafel kann zwischen den Kammern horizontal oder vertikal entzwei gebrochen werden, wobei dadurch zwei Teilstücke entstehen.
Was ist die minimale Anzahl an Brüchen, die durchgeführt werden müssen, um die Schokolade in ihre 20 Kammern zu zerlegen?
Dabei dürfen bei einem Brechvorgang nicht mehrere Teilstücke auf einmal entzweigebrochen werden.



Knifflige Knobelaufgaben zur Mathematik – Lösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

A	G	2	7

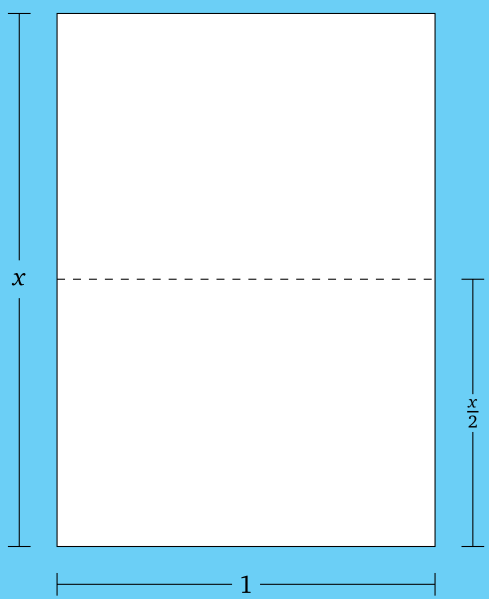
Auf dem Tisch liegen vier Karten. Bei jeder Karte steht auf der einen Seite ein Buchstabe und auf der anderen Seite eine Zahl. Wir wollen fordern, dass bei jeder Karte, bei der der Buchstabe ein Vokal ist, auf der anderen Seite eine gerade Zahl steht.
Welche Karten müssen Sie umdrehen, um zu prüfen, ob die Forderung eingehalten wurde?

Lösungshinweise:
Um die Lösung dieser Aufgabe ein wenig intuitiver zu gestalten, schreiben wir die Karten um.
Die Karten sollen nun eine Person beschreiben, die ein Getränk bestellt. Hierbei ersetzen wir die Buchstaben durch das entsprechende Getränk und interpretieren die Zahl als das Alter der Person. Nun fordern wir, dass jede Person, die ein alkoholisches Getränk bestellt, über 18 sein muss. Dazu legen wir folgende Karten auf den Tisch:

Vodka	Wasser	21	12

Hierbei müssen die Karte mit dem Getränk „Vodka“ und die Karte mit dem Alter „12“ umgedreht werden. Erstere drehen wir um, weil wir prüfen wollen, dass die bestellende Person nicht minderjährig war. Zweitere drehen wir um, weil wir prüfen wollen, ob die minderjährige Person Alkohol bestellt hat. Die verbleibenden Karten brauchen wir nicht zu prüfen, da unabhängig der Rückseite die Forderung nicht verletzt werden kann.
Diese Aufgabe zeigt ein anschauliches Beispiel für eine Beweisform, die sich Kontraposition nennt. Um zu kontrollieren, ob eine Person mit alkoholischem Getränk über 18 ist, überprüfen wir ob die Umkehrung der Aussage nicht eingehalten wurde; in unserem Fall also, dass eine minderjährige Person keinen Alkohol trinkt.

Bei der Größe von Papier ist das Längenverhältnis der Seitenkanten von großer Relevanz. So ist beispielsweise das Seitenverhältnis von DIN A4-Papier (also auch so eines, wie das, auf dem diese Aufgabe steht) so ausgelegt, dass das Längenverhältnis zwischen der kürzeren und längeren Kante erhalten bleibt, wenn man das Papier der Länge nach in der Mitte faltet.



a) Angenommen, die kürzere Seite eines DIN A4-Blattes ist $1LE$ lang. Sei x die Länge der längeren Seite. Wie muss x gewählt werden, damit das Blatt ein DIN A4-Blatt ist?
(Zur Kontrolle: $x = \sqrt{2}$)

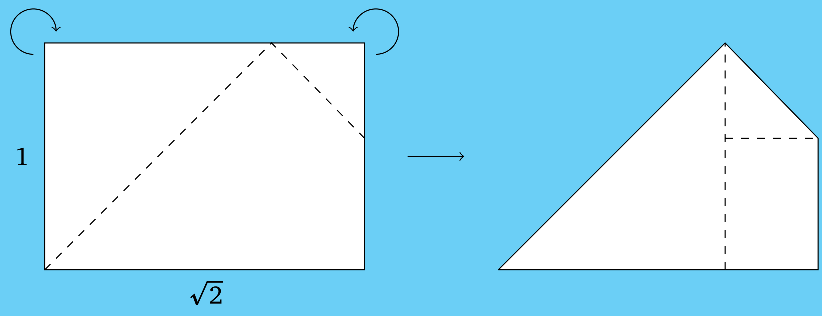
Lösungshinweise:

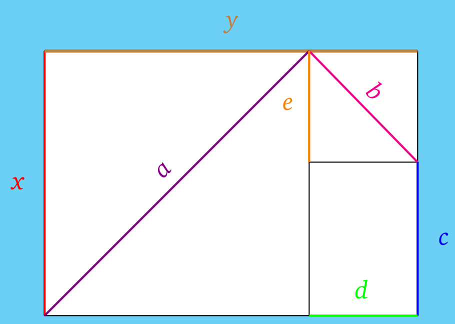
Wir setzen die Längenverhältnisse des ganzen und des halben Blattes gleich:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{1}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$. Da es keine negativen Längen gibt, lautet die Lösung $x = \sqrt{2}$.

b) Bei einem DIN A4-Papier wurden zwei Ecken um 45° wie im Bild abgeknickt. Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur, wenn die kürzere Seite des A4-Papiers $1 LE$ lang ist?





Lösungshinweise
Zuerst beschriften wir wichtige Seiten und Längen, damit wir sie verständlicher beschreiben können. Wir ermitteln nun die Längen in mehreren Schritten.

1. Mit der Beschriftung in der Aufgabenstellung können wir direkt schließen, dass $x = 1$ und $y = \sqrt{2}$ ist.

2. Da wir um 45° abgeknickt haben, erhalten wir ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge x und Hypotenuse der Länge a. Nach dem Satz des Pythagoras ist
$$a = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^21} = \sqrt{2}$$
.

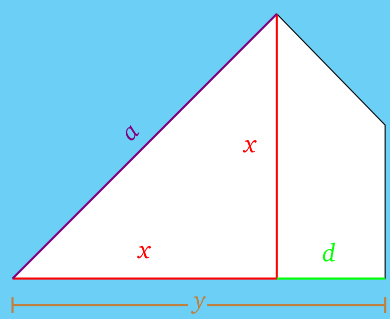
3. Wie wir im 2. Schritt gesehen haben, ist x die Länge von der unteren linken Ecke bis zur umgeschlagenen Kante. Entsprechend ergibt sich $x + d = y$, also $d = \sqrt{2} - 1$.

4. Wie auch in Schritt 2 erhalten wir beim Abknicken der kleineren Ecke ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck, also ist $e = d$ und das Dreieck hat Katheten der Länge d und Hypotenuse der Länge b. Wir erhalten also
$$b = \sqrt{d^2 + d^2} = \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}d = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$
.

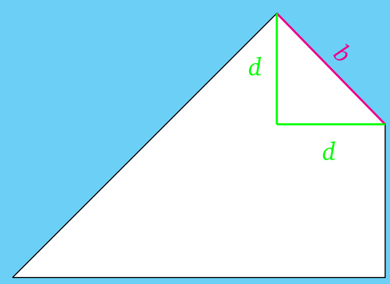
5. Zuletzt wollen wir die Länge c bestimmen. Es gilt $c + e = x$, also ist
$$c = x - e = x - d = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$
.

Für den Umfang erhalten wir also
$$\begin{aligned} u &= a + b + c + y \\ &= \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

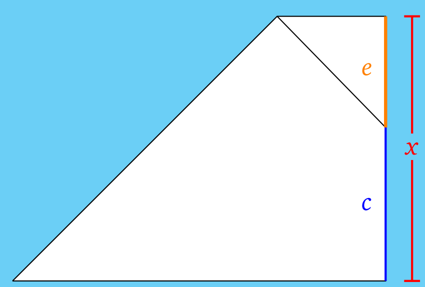
2. & 3. Schritt:

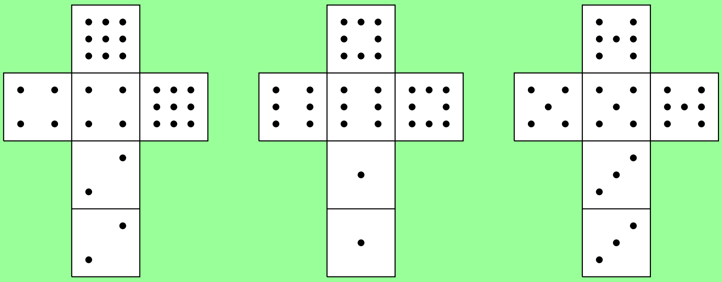


4. Schritt:



5. Schritt:

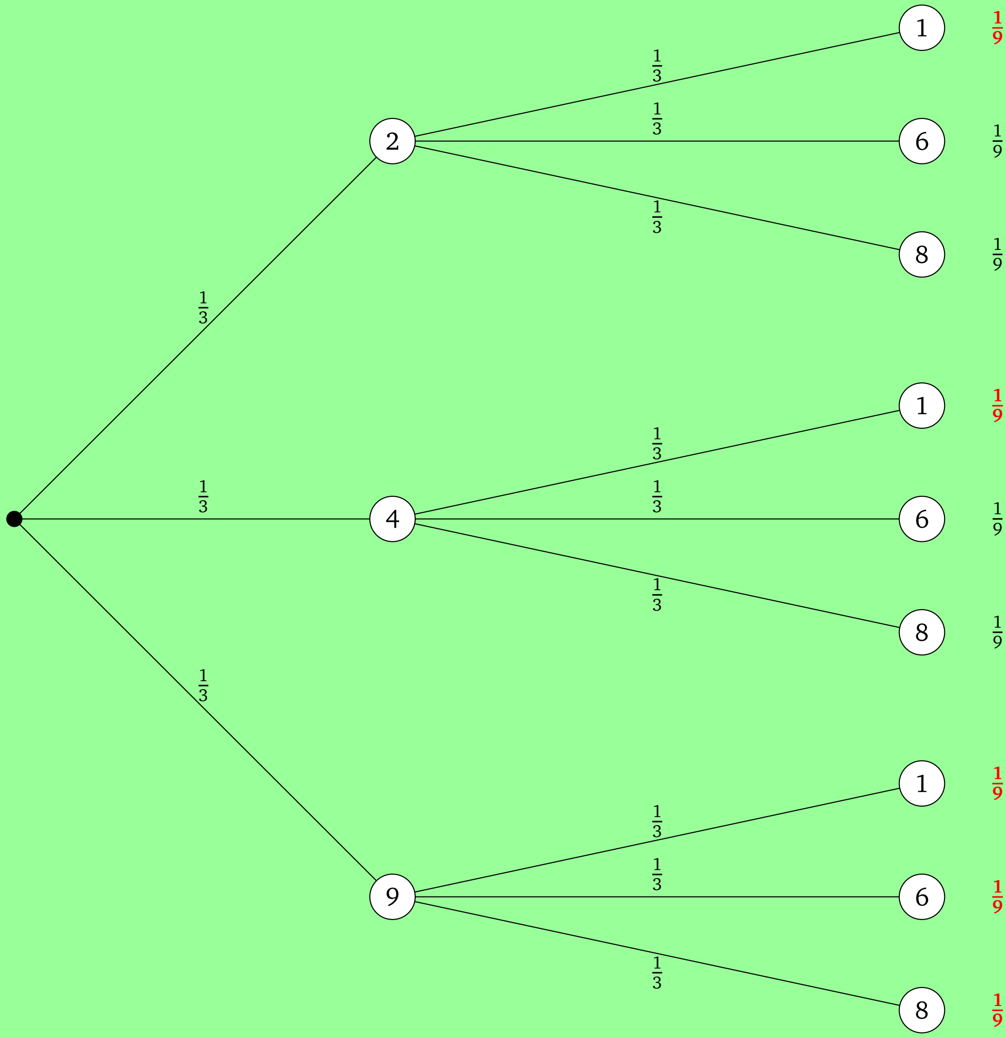




W_1 W_2 W_3

Links sind die Abwicklungen von drei Würfeln dargestellt. Zwei Spieler wählen je einen Würfel und werfen die beiden gegeneinander. Der Spieler, bei dessen Würfel die Augenzahl der nach oben zeigenden Seite höher ist, gewinnt.

Lösungshinweise: Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten, indem wir einen Wahrscheinlichkeitsbaum zeichnen. Als Beispiel ist hier der Baum für W_1 gegen W_2 aufgeführt. Rote Zahlen gehören zu den Pfaden, in denen W_1 gewinnt.



Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(„W_1 \text{ gewinnt gegen } W_2“) = \mathbb{P}(„W_2 \text{ gewinnt gegen } W_3“) = \mathbb{P}(„W_3 \text{ gewinnt gegen } W_1“) = \frac{5}{9}.$$

Bei diesen Würfeln handelt es sich um sogenannte „Intransitive Würfel“. Ihre besondere Eigenschaft ist, dass jeder Würfel im Schnitt gegen einen Würfel verliert und einen Anderen schlägt. Dieses Verhalten zeigt, dass nicht alle Dinge sortierbar sind. Ein weiteres Beispiel dafür ist das Spiel „Schnick-Schnack-Schnuck“ (auch bekannt unter dem Titel „Schere-Stein-Papier“).

Ein Witz unter Mathematikern lautet:

> Drei Mathematiker gehen in eine Bar. Der Wirt fragt: „Für jeden ein Bier?“ Der erste Mathematiker entgegnet: „Weiß nicht.“ Der zweite Mathematiker sagt ebenfalls: „Weiß nicht.“ Darauf antwortet der dritte Mathematiker: „Ja, bitte!“

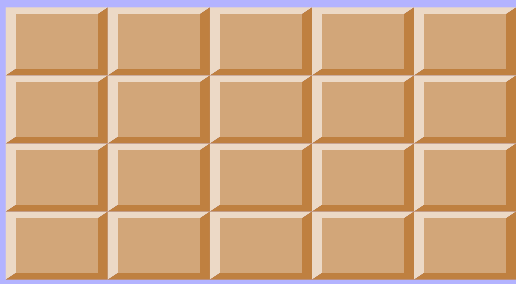
Wie kommen diese Antworten zustande?
Lösungshinweise:
Bei diesem Witz handelt es sich um eine logische Fragestellung. Aus der Aussage des dritten Mathematikers können wir schließen, dass jeder ein Bier möchte.
Betrachten wir den Zeitpunkt der ersten Antwort, so weiß der erste Mathematiker, dass er zwar selbst ein Bier bestellen möchte, jedoch weiß er (noch) nicht, wie es um seine Kollegen steht. Mit einem „Ja“ würde er nämlich behaupten, dass seine Kollegen ebenfalls ein Bier wollen. Deswegen sagt er: „Weiß nicht.“
Nun betrachten wir den Zeitpunkt der zweiten Antwort. Durch die Antwort des ersten Mathematikers weiß der Zweite, dass dieser ein Bier bestellen möchte. Hätte der erste Mathematiker nämlich keines gewollt, so hätte er mit „Nein“ geantwortet. Da der zweite Mathematiker ebenfalls ein Bier bestellen möchte aber selbst auch (noch) nicht weiß, wie es um den dritten Mathematiker steht, antwortet er ebenfalls mit „Weiß nicht.“
Zum Zeitpunkt der letzten Antwort versetzen wir uns in die Lage des dritten Mathematikers. Da keiner seiner beiden Kollegen mit „Nein“ geantwortet hat, kann er daraus schließen, dass beide ein Bier bestellen möchten. Da er ebenfalls gerne ein Bier hätte und nun auch die Bestellwünsche aller Beteiligten kennt, kann er korrekterweise mit „Ja, bitte!“ antworten.

Eine Mathematikerin ist bei einem alten Bekannten aus ihrer Schulzeit zu Besuch. Irgendwann kommen sie auf das Gesprächsthema Familie und als die Mathematikerin fragt, wie alt denn die drei Töchter des Bekannten seien, meint dieser, dass die Summe ihrer Alter seine Hausnummer ergeben und dass das Produkt ihrer Alter 72 betrage.
Die Mathematikerin überlegt und meint, dass diese Informationen nicht ausreichen. Darauf sagt der Bekannte: „Die Älteste von ihnen will auch mal Mathematik studieren.“ Das scheint Information genug zu sein, da die Mathematikerin sofort alle drei Alter ohne Fehler angeben kann.
Wie alt sind die Töchter des Bekannten?
Lösungshinweise:
Hierbei handelt es sich mehr um eine Knobelaufgabe. Wir ermitteln zuerst alle Zerlegungen von 72 in drei (positive, ganzzahlige) Faktoren:

$$
\begin{array}{rll|ll}
72 & = 1 \cdot 1 \cdot 72 & (74) & = 2 \cdot 2 \cdot 18 & (22) \\
 & = 1 \cdot 2 \cdot 36 & (39) & = 2 \cdot 3 \cdot 12 & (17) \\
 & = 1 \cdot 3 \cdot 24 & (28) & = 2 \cdot 4 \cdot 9 & (15) \\
 & = 1 \cdot 4 \cdot 18 & (23) & = 2 \cdot 6 \cdot 6 & (14) \\
 & = 1 \cdot 6 \cdot 12 & (19) & = 3 \cdot 3 \cdot 8 & (14) \\
 & = 1 \cdot 8 \cdot 9 & (18) & = 3 \cdot 4 \cdot 6 & (13)
\end{array}
$$

Als nächstes befassen wir uns mit der Hausnummer. Die Klammern hinter der Zerlegung beschreiben die Hausnummer, die der Bekannte haben müsste, wenn seine Kinder entsprechend alt wären. Da die Mathematikerin bei ihrem Kollegen zu Besuch ist, müsste ihr die Hausnummer bekannt sein. Durch den Umstand, dass sie meint, dass die Informationen nicht ausreichen, können wir schließen, dass die zugeordnete Altersverteilung nicht eindeutig sein kann. Es verbleiben also nur die zwei Möglichkeiten, in denen die Töchter entweder 2, 6 und 6 oder 3, 3 und 8 Jahre alt sind.
Durch die weitere Bemerkung können wir jedoch die genaue Verteilung bestimmen. Dadurch, dass es eine „älteste“ Tochter gibt, kann der erste Fall (2,6,6) nicht möglich sein (da es sonst „Eine meiner ältesten Töchter“ oder „Meine ältesten Töchter“ heißen müsste).
Die Lösung lautet also, dass die Töchter 3, 3 und 8 Jahre alt sind.

Auf dem Tisch befindet sich eine Tafel Schokolade, die aus 5×4 Kammern besteht. Die Tafel kann zwischen den Kammern horizontal oder vertikal entzwei gebrochen werden, wobei dadurch zwei Teilstücke entstehen.
Was ist die minimale Anzahl an Brüchen, die durchgeführt werden müssen, um die Schokolade in ihre 20 Kammern zu zerlegen?
Dabei dürfen bei einem Brechvorgang nicht mehrere Teilstücke auf einmal entzweigebrochen werden.



Lösungshinweise:
Die Anzahl der Brüche, die durchgeführt werden müssen, wird – unabhängig der Strategie – immer 19 sein.
Sobald ein Teilstück entzweigebrochen wird, entstehen daraus immer 2 Teilstücke, wodurch sich die Gesamtzahl der Teilstücke immer um 1 erhöht. Da durch das Brechen eine Anzahl von 20 Teilstücken erreicht werden soll, muss es also 19-mal erfolgen.
Dies lässt sich übrigens auch allgemeiner für eine beliebige Kammerzahl ausdrücken: Wenn die (intakte) Tafel n Kammern hat, werden immer $n - 1$ Brüche notwendig sein, um sie in ihre Einzelkammern zu zerlegen.

Diracs Gürteltrick

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der Gürteltrick

Es gibt Objekte, die erst durch eine Drehung um 720 Grad wieder in ihren Ausgangszustand zurückversetzt werden. Man betrachte einen ausgestreckten Gürtel, der an der Spitze festgehalten wird (siehe Bild 1). Drehen wir die Gürtelschnalle um 360 Grad, so befindet diese sich wieder in ihrer Ausgangslage. Der gesamte Gürtel ist aber nicht mehr in seinem ursprünglichen Zustand. Der Gürtel ist nun einmal verdreht (siehe Bild 2). Erstaunlicherweise können wir aber den Gürtel in seine Ausgangslage zurückversetzen, indem wir die Schnalle um weitere 360 Grad in dieselbe Richtung drehen. Nun ist der Gürtel zweimal verdreht (siehe Bild 3). Durch Umstülpen des Gürtels über die Schnalle können wir diese Drehung aber wieder aufheben, ohne dabei die Schnalle wieder zurückzudrehen (siehe Bild 4). Wir sehen also, dass der Gürtel erst durch eine Drehung um 720 Grad wieder in seinen Ausgangszustand zurückversetzt wurde (Bild 5).

Solche Objekte muss es geben, weil die Drehgruppe SO(3) eine nicht-triviale doppelte Überlagerung besitzt, Spin(3) genannt. Eine Drehung um 720 Grad überführt aber jedes Objekt wieder in seinen Ausgangszustand, was daran liegt, dass Spin(3) einfach zusammenhängend ist. Dies möchten wir genauer Erklären.


Bild 1


Bild 2


Bild 3


Bild 4


Bild 5

Drehgruppen

Mit SO(3) bezeichnen wir die Gruppe aller Drehungen im 3-dimensionalen Raum. Topologisch entspricht diese Gruppe dem projektiven 3-dimensionalen Raum $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$. Diese Gruppe besitzt eine sogenannte nicht-triviale doppelte Überlagerung, Spin(3). Diese ist topologisch gleich der 3-Sphäre. Da man 4 Dimensionen benötigen würde, um diese zu visualisieren, wollen wir stattdessen den projektiven 2-dimensionalen Raum und die 2-Sphäre betrachten.

Topologie

Der projektive 2-dimensionale Raum $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ besteht aus allen Geraden im $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung. Die 2-Sphäre S^2 ist die Oberfläche einer Kugel. Es gibt eine natürliche Abbildung von der 2-Sphäre in den projektiven 2-dimensionalen Raum, nämlich legen wir die Kugel in den $\mathbb{R}^3$, sodass der Mittelpunkt auf dem Ursprung liegt und bilden einen Punkt auf der Kugeloberfläche auf die Gerade ab, die durch den Ursprung und diesen Punkt verläuft. Auf diese Weise treffen wir offensichtlich alle Geraden durch den Ursprung und eine Gerade wird immer von genau 2 Punkten getroffen, nämlich genau zwei sich gegenüberliegende Punkte. Solch eine Abbildung von topologischen Räumen nennt man doppelte Überlagerung. Wir können also auch den projektiven 2-dimensionalen Raum als 2-Sphäre auffassen, wobei aber sich gegenüberliegende Punkte miteinander identifiziert werden. Insbesondere gibt es zu jedem Punkt auf der unteren Hemisphäre einen Punkt auf der oberen Hemisphäre, der mit diesem identifiziert wird. Wir vereinfachen das Bild noch weiter und stellen uns den $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ als obere Hemisphäre vor, wobei wir sich gegenüberliegende Punkte auf dem Äquator miteinander identifizieren.

Es stellt nun jede Rotation der Gürtelschnalle einen Punkt in $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ dar (Gelb). Genauso stellt aber auch jeder andere Querschnitt des Gürtels solch einen Punkt dar, insbesondere auch die Gürtelspitze (Grün). Da der Gürtel zusammenhängend ist, bilden alle anderen Punkte einen stetigen Pfad von Grün nach Gelb (Rot).

Beweis

Der Gürtel im Ausgangszustand entspricht dem trivialen Pfad (Grün, Gelb und Rot im selben Punkt), da hier die Rotation überall gleich ist. Drehen wir die Gürtelschnalle um 360 Grad, entspricht dies einer gradlinigen Bewegung in $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$. Wir erhalten einen Halbkreis (Bild 7). Dies ist ein geschlossener Pfad, da ja sich gegenüberliegende Punkte auf dem Äquator miteinander identifiziert werden. Man sieht leicht, dass sich dieser Pfad nicht ohne zerschneiden in den trivialen Pfad überführen lässt. Nun drehen wir die Gürtelschnalle um weitere 360 Grad. Wir gehen den Pfad also zweimal. Betrachten wir diesen Pfad aber in der doppelten Überlagerung S^2, so erhalten wir einen vollen Großkreis (Bild 8). Diesen kann man offensichtlich ohne Zerschneiden in den trivialen Pfad überführen (Bild 9). Führt man diese Bewegung auf dem Gürtel durch, erhält man den Gürteltrick! Tatsächlich ist S^2 einfach-zusammenhängend, d.h. für zwei beliebige Punkte A, B auf S^2 gibt es immer einen stetigen Pfad von A nach B und zwei beliebige solcher Pfade sind immer ohne Zerschneiden ineinander überführbar. Insbesondere ist also jeder geschlossene Pfad in den trivialen Pfad überführbar. Wir erinnern nochmal daran, dass die Rotationsgruppe SO(3) eigentlich dem $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ entspricht und Spin(3) der 3-Sphäre. Die Argumente sind aber analog.

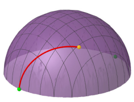


Bild 6

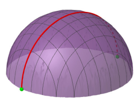


Bild 7

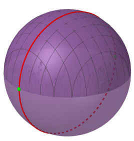


Bild 8

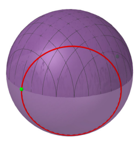


Bild 9

Exkurs

Das Phänomen des Gürteltricks findet Anwendung in der Quantenelektrodynamik. Fermionen mit Spin 1/2 kehren in ihren Ursprungszustand erst nach einer Drehung um 720 Grad zurück.

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Handout

Schachbrett-Codes

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Das Rätsel um die Schachbrett-Codes

Du bist gemeinsam mit einem Freund in einem Verlies gefangen, dessen Wärter euch nur rauslässt, wenn ihr sein Rätsel lösen könnt. Er zeigt euch ein Schachbrett, 64 handelsübliche Münzen und den Schlüssel zur Verliestür.

Er sagt: „Einen von euch werde ich in ein anderes Verlies sperren, von dem aus die Person nichts mehr mitbekommt. Der anderen Person werde ich zeigen, wie ich den Schlüssel unter einem der 64 Felder verstecke und auf jedes der Felder eine Münze mit wahlweise Kopf oder Zahl oben lege. Dann muss diese Person genau eine Münze umdrehen. Schließlich tauscht ihr die Positionen und der von euch, der zuerst weggesperrt war, muss anhand der Münzen erkennen unter welchem Feld der Schlüssel versteckt ist. Nur dann kommt ihr hier raus. “

Die Person, die hinterher rät, sieht also nur die Anordnung nach dem Umdrehen der Münze, weiß aber nicht, welche Münze umgedreht wurde. Es gibt während des Rätsels keine Möglichkeit der Kommunikation, aber ihr dürft vorher miteinander reden, um eine Strategie auszumachen. Seid aber gewarnt, denn der Wärter hört eure Strategie und kann die Münzen so fies wie möglich auslegen, um eure Strategie zunichte zu machen. Wie könnt ihr trotzdem garantieren, den Schlüssel zu finden, um aus dem Verlies herauszukommen?

Erste Lösungsgedanken

Da der ratenden Person nicht bewusst ist, welche Münze umgedreht wurde, muss sie allein anhand der ausliegenden Münzen erkennen, wo der Schlüssel ist. Wir müssen also jeder der 2^{64} möglichen Auslegungen der Münzen genau ein Zielfeld zuordnen, unter dem dann der Schlüssel versteckt sein soll. Es gibt 64 mögliche Felder für den Schlüssel und wir dürfen genau eine von 64 Münzen umdrehen. Damit unsere Zuordnung gewinnbringend ist, müssen wir aus jeder Position mit nur einem Umdrehen einer Münze in eine Position kommen, die das richtige Zielfeld hat - egal, wo der Schlüssel ist.

Der Einfachheit halber wollen wir das Rätsel erstmal auf einem 2×2-Feld lösen. Die Ideen bleiben aber gleich.

Rechnen mit zwei Elementen

In der Schule wird hauptsächlich in den reellen Zahlen gerechnet, aber es gibt auch weitere Zahlenbereiche mit eigenen Rechenoperationen, die ähnlichen Gesetzmäßigkeiten folgen, sogenannte *Körper*. Hier wollen wir den Körper mit zwei Elementen betrachten, den $\mathbb{F}_2$. Dieser besteht aus den Zahlen 0 und 1, die man wie folgt miteinander „addiert “: Wenn ich etwas mit 0 addiere, dann bleibt es wie gewohnt gleich, wenn ich aber 1 und 1 addiere, dann soll 0 herauskommen. Da wir keine anderen Zahlen haben, ist das alles, was wir wissen müssen.

Vergewissere dich, dass bei dieser Rechenoperation Addition und Subtraktion das gleiche sind.

Geordnete Paare

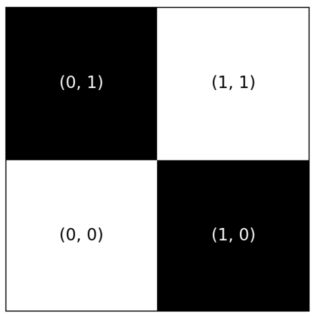
Statt mit nur einer Zahl zu rechnen, kann man auch mehrere Zahlen hintereinander in sogenannten *Tupeln* schreiben. Bei zwei Zahlen nennt man das dann einen *2-Tupel* oder ein *geordnetes Paar*. Wenn man mehrerer solcher Tupel addieren will, geht man *komponentenweise* vor. Das heißt, die erste Zahl wird mit der ersten addiert, die zweite mit der zweiten, etc.

Vielleicht hast Du etwas Ähnliches bereits als Vektoren in der Schule kennengelernt.

Die Lösung

Nutzen wir die Begriffe, die wir soeben eingeführt haben. Wir ordnen auf unserem 2×2-Brett jedem Feld ein geordnetes Paar aus Elementen im $\mathbb{F}_2$ zu - von denen gibt es auch genau 4. Jeder möglichen Auslegung ordnen wir wie folgt ein Zielfeld zu: Wir addieren die Paare aller Felder, auf denen die Münze auf Kopf liegt und nehmen das Feld, das zur Summe gehört. Wenn der Wärter uns jetzt eine beliebige Auslegung gibt und den Schlüssel unter einem Feld versteckt, dann müssen wir nur ausrechnen, was das aktuelle Zielfeld ist und die Differenz mit dem Paar bilden, das zum Feld mit dem Schlüssel gehört. Wenn wir die Münze auf dem Feld umdrehen, das zur Differenz gehört, dann ist das neue Zielfeld genau das Feld mit dem Schlüssel! Man beachte, dass dabei egal ist, ob wir die Münze von Kopf auf Zahl oder von Zahl auf Kopf drehen, weil Plus und Minus im $\mathbb{F}_2$ dasselbe sind.

Wenn wir das Rätsel auf einem richtigen Schachbrett lösen wollen, dann müssen wir nur jedem Feld ein 6-Tupel im $\mathbb{F}_2$ zuordnen, wovon es genau $2^6 = 64$ gibt.



Ausblick

Da die Anordnung der Felder für das Rätsel eigentlich egal ist, können wir uns das gleiche Rätsel auch für beliebige Felderanzahlen stellen. Unsere Lösung hier lässt sich so variieren, dass sie das Rätsel löst, solange die Felderanzahl eine Zweierpotenz ist, indem wir die Länge des Tupels anpassen. Tatsächlich kann man beweisen, dass das Rätsel unlösbar ist, wenn die Felderanzahl keine Zweierpotenz ist! Das benötigt aber andere Mathematik, nämlich die Fragestellung nach der Färbbarkeit von Graphen.

Die Mathematik dieses Rätsels findet Anwendung in der digitalen Signalverarbeitung in der Form fehlerkorrigierender Codes. Das Stichwort hier für die weitere Suche sind Hamming-Codes.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Algebra

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Wolle und Geometrie

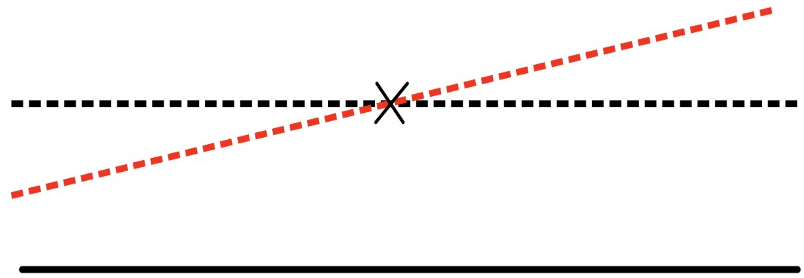
Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Krümmungen auf Flächen

Wenn wir eine Gerade und einen Punkt fixieren, welcher nicht auf der Geraden liegt, dann gibt es auf der euklidischen Ebene genau eine parallele Gerade die durch den Punkt geht. Das liegt daran, dass die euklidische Ebene keine Krümmung hat. Das kann man auch daran sehen, dass die Innenwinkel eines Dreiecks immer $120°$ ergeben.

Parallele geraden durch einen Punkt



Die Grundfrage

Was passiert bei Räumen, die gekrümmt sind, zum Beispiel einer Kugel oder einem Sattel? Kann man anhand der Winkel oder der Geraden durch einen Punkt die Krümmung herausfinden?

Überlegung

Zuerst müssen wir festlegen, was eine Gerade ist. Diese werden auch als Geodäten bezeichnet. Intuitiv heißt das, dass man von einem Punkt aus einfach gerade aus läuft.

Auf einer Kugel ist zum Beispiel der Äquator eine Geodäte. Auf einem Sattel sieht das schon komplizierter aus, erst recht auf einer Hyperbolischen Ebene. Der Trick ist es die Hyperbolische Ebene zu falten. Dadurch ensteht eine gerade Linie.

Man kann also sehr gut sehen, was auf einer Kugel und einem Sattel passiert.

Häkeln

Auf dem Junior retreat der Algebra haben wir zusammen mit den Arbeitsgruppen der Uni Frankfurt, Heidelberg und Mainz hyperbolische Ebenen und Möbuisbänder gehäkelt.

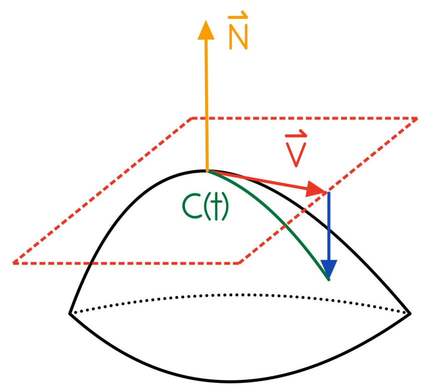
Falls man eine Halbkugel Häkeln möchte, so kann man mit einer Ebene anfangen. Intuitiv zieht man nach und nach am Faden, also man nimmt Stoff weg.

Für eine hyperbolische Ebene ist das genau anders herum. Man fügt immer mehr Stoff hinzu. So hat hyperbolische Ebene auf dem gleichen Grundriss gesehen mehr Stoff und die Kugel weniger.

Die Mathematik dahinter

Wie definiert man nun Krümmung? Die Idee dazu bleibt gleich: Wir schauen uns Geraden an. Sei F eine glatte Fläche im 3-dimensionalen Raum (also ohne Spitzen). Wir nehmen uns erst eine Richtung, die wir als Vektor v im 3-dimensionalen Raum bezeichnen. Wir definieren auf unserer Fälche F eine Funktion $c(t)$, die auf dieser Fläche in Richtung v geht.

Nun können wir mithilfe der Ableitung überpfrüfen, ob die Kurve nach unten oder nach oben geht. Falls es nach oben geht, so hat unsere Fläche positive Krümmung $K_v > 0$ in Richtung v und falls es runter geht negative Krümmung $K_v < 0$ in Richtung v. Das ganze machen wir nochmal mit einem anderen Richtungsvektor w der senkrecht auf v steht und multiplizieren $K_F = K_v \cdot K_w$, das ist die Krümmung unserer Fläche F.

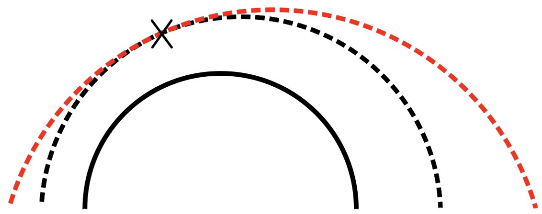


Krümmung der Kugel und des Sattels

Auf einer Schüssel C zum Beispiel geht es vom Boden der Schüssel nur hoch. Daher $K_C > 0$. In der Mittel von einem Sattel S geht es in eine Richtung hoch und in der anderen runter, daher ist $K_S < 0$.

Frage: Was passiert auf einem Kegel? Wie sehen die Geodäten aus. Wie sehen sie aus, wenn man den Kegel äufklappt"?

2 parallele Geodäten eines Kegels durch einen Punkt



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Algebra

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

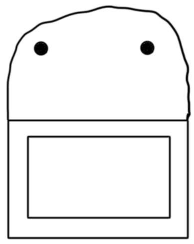
Brett mit Nägeln

Lange Nacht der Mathematik 2025

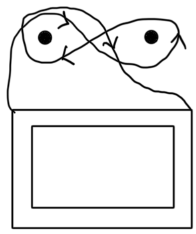
Hängen Sie ein Bild mit einem Faden so an zwei Nägeln auf, dass es herunterfällt, sobald ein beliebiger Nagel aus der Wand gezogen wird.

Schritt 1
Wir versuchen das Problem mathematisch zu formulieren. Wir fangen an einer Ecke des Bildes an und gehen entlang des Fadens. Dabei schreiben wir L, wenn wir den Faden im Uhrzeigersinn um den linken Nagel wickeln und L', wenn wir den Faden gegen den Uhrzeigersinn um den linken Nagel wickeln. Genauso schreiben wir R und R', wenn wir den Faden um den rechten Nagel wickeln. Das machen wir so lange, bis wir an der rechten Ecke des Bildes ankommen. Eine Aneinanderreihung der Symbole L, L', R, R' nennt man ein Wort und für jedes solche Wort erhalten wir eine Möglichkeit, den Faden um die Nägel zu wickeln und umgekehrt. Wickeln wir den Faden gar nicht um die Nägel, so erhalten wir das sogenannte leere Wort, welches wir mit 0 bezeichnen. Unten sehen Sie ein paar Beispiele.

Beispiele für Wörter:



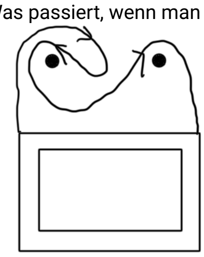
LR



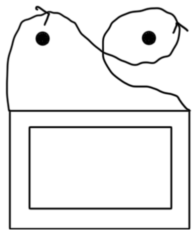
$LR'L$

Schritt 2
Wenn wir den Faden zunächst im Uhrzeigersinn und danach gegen den Uhrzeigersinn um den selben Nagel wickeln, so hat dies offenbar den selben Effekt, als hätten wir ihn gar nicht um den Nagel gewickelt. Insbesondere können wir Wörter in denen Kombinationen der Form $LL', L'L, RR'$ oder $R'R$ vorkommen kürzen, indem wir diese aus dem Wort streichen. Zum Beispiel liefern $RL'LR$ und RR die selben Wickelungen um die Nägel und wir schreiben $RL'LR = RR$. Können wir dies für ein Wort so lange wiederholen, bis kein Symbol mehr übrig bleibt, wir also das leere Wort 0 erhalten, so fällt der Faden herunter. Zum Beispiel fällt der zum Wort $RL'LR'$ gehörige Faden herunter, da $RL'LR' = RR' = 0$.

Was passiert, wenn man den rechten bzw. linken Nagel herauszieht?



$LL'R = R$

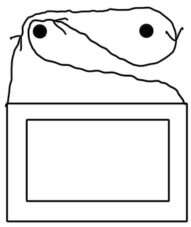


LR'

Schritt 3
Ziehen wir den linken Nagel aus der Wand, so werden alle L und L' aus dem Wort gestrichen. Ziehen wir den rechten Nagel aus der Wand, so werden alle R und R' aus dem Wort gestrichen. Das Wort LRL' wird also zum Wort $LL' = 0$, wenn wir den rechten Nagel ziehen und zum Wort R, wenn wir den linken Nagel ziehen.

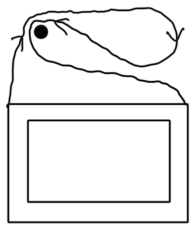
Schritt 4
Wir suchen ein Wort, welches sich nicht zum leeren Wort kürzt und sich nach rausstreichen aller L und L' zum leeren Wort kürzt und nach dem Rausstreichen aller R und R' zum leeren Wort kürzt.

Beispiele fürs Kürzen:



LRL'

wird zu



$LL' = 0$

Schritt 5
Ein Beispiel ist gegeben durch $LRL'R'$. Nach dem Rausstreichen von L, L' erhalten wir $RR' = 0$ und nach dem Rausstreichen von R, R' erhalten wir $LL' = 0$.

Weiterführendes:
Was passiert, wenn man (was sicherlich oft vorkommt) das Bild an drei oder mehr Nägeln aufhängt?
Probleme wie das hier dargestellte fallen in das Gebiet der *Topologie*. Mögliche Google- oder KI-Schlagworte sind: *Topologie*, *Fundamentalgruppe*, *Homotopie*, *Knotentheorie*.

Mandelbrot-Menge und fraktales Instrument

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Mandelbrot-Menge (Geschichte)

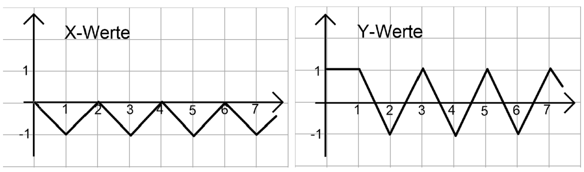
Die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ ist benannt nach dem französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924-2010) und besteht aus allen Punkten (x_0, y_0) in der Ebene, für welche die unten definierte Iterationsvorschrift beschränkt bleibt. In der Mandelbrot-Menge lassen sich allerhand interessante geometrische Objekte erkennen, wie z.B. Spiralen, „Seepferdchen" oder Satelliten mit Antennen, die sich beim Hereinzoomen wiederholen. Man nennt Mengen mit dieser Eigenschaft fraktale Mengen. Diese kommen auch nicht selten in der Natur vor, z.B. beim Blumenkohl.

Umwandlung in Töne

Die Software spielt zu jedem Punkt der Mandelbrot-Menge einen Klang ab. Das funktioniert so: Für einen Punkt (x_0, y_0) aus $\mathbb{M}$ betrachten wir die im rechten Kasten beschriebenen Folgen $x_0, x_1, x_2, \dots$ und $y_0, y_1, y_2, \dots$. Wir interpretieren die Werte als Amplituden zweier Schallwellen und spielen sie auf je einem der beiden Lautsprecher ab. Nehmen wir zum Beispiel den Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$, so erhalten wir die Folgen

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots),$$
$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

Dies ergibt also die folgenden Schallwellen:



Iterationsvorschrift

Wir geben ein $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vor. Das nächste Folgenglied ist dann rekursiv definiert durch

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n^2 - y_n^2, 2x_n y_n) + (x_0, y_0).$$

Ein Start mit dem Beispiel von links, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, liefert

$$(x_1, y_1) = (-1, 1), \quad (x_2, y_2) = (0, -1), \quad (x_3, y_3) = (-1, 1), \dots.$$

Starten wir dagegen mit $(x_0, y_0) = (1, 0)$, so ergibt sich

$$(x_1, y_1) = (2, 0), \quad (x_2, y_2) = (5, 0), \quad (x_3, y_3) = (26, 0), \dots.$$

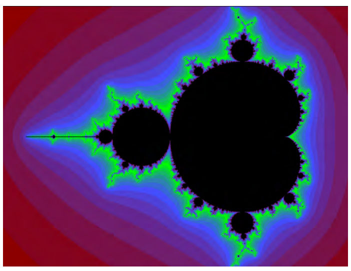


Abb. 1: Bild der Mandelbrot-Menge

Außerhalb der Menge $\mathbb{M}$

Für Punkte, die nicht in der Mandelbrot-Menge liegen, bleibt die Iteration nicht beschränkt, d. h. die x- oder y-Koordinate des Punktes in der Iterationsvorschrift wird beliebig groß.

Aufgaben an euch:

1) An welchen Stellen entstehen klare Töne, wo stoßt ihr auf bizarre Geräusche? Habt ihr eine Idee, woran das liegt? Versucht, vor dem Erzeugen des nächsten Tons vorherzusagen, wie er klingt.

2) Sucht euch weitere Startwerte aus und berechnet die Werte für die ersten paar Iterationen.
Liegen diese Startwerte innerhalb der Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ oder nicht?

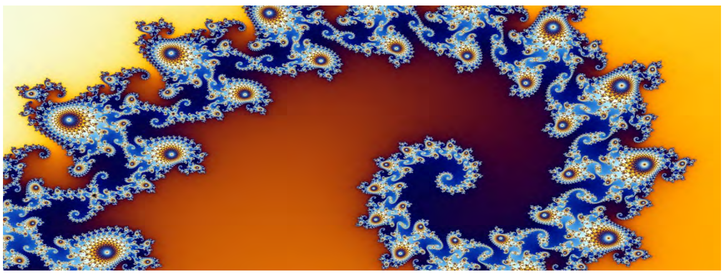


Abb. 2: Zoom in das „Tal der Seepferdchen" in der Mandelbrot-Menge

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Analysis

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Nicht-Newtonsche Fluide: Wie man (fast) über Wasser laufen kann

Lange Nacht der Mathematik

Hintergrund zu nicht-Newtonschen Fluiden

Nicht-Newtonsche Fluide sind Flüssigkeiten, deren Fließverhalten nicht den Gesetzen entspricht, die Isaac Newton für ideale Flüssigkeiten beschrieben hat. Bei Newtonschen Fluiden wie Wasser oder Luft ist die Viskosität (Zähflüssigkeit) unabhängig von der aufgebrachten Scherung (Kraft pro Fläche). Bei nicht-Newtonschen Fluiden hingegen verändert sich die Viskosität, wenn eine Scherkraft oder andere Spannung wirkt.

Es gibt verschiedene Arten von nicht-Newtonschen Fluiden. Zahnpasta oder Ketchup zählen etwa zu den scherverdünnenden Fluiden. Dies bedeutet, dass die Viskosität mit steigender Scherung abnimmt, sodass zum Beispiel Zahnpasta erst unter Druck aus der Tube gleitet. Genauso gibt es scherverdickende Fluide, bei denen die Viskosität zunimmt, wenn die Scherung erhöht wird. Die vorliegende Speisestärke-Wasser-Mischung, die auch „Oobleck“ genannt wird, lässt sich diesen Fluiden zuordnen. Weitere Beispiele für nicht-Newtonsche Fluide sind Lacke, Ton oder bestimmte Gipsarten.

Oobleck - ein nicht-Newtonsches Fluid

Oobleck entsteht beim Mischen von Speisestärke mit Wasser in einem Volumenverhältnis von $2:1$. Durch den scherverdickenden Charakter lässt es sich nur schwer vermischen und widersetzt sich dem Rühren. Bei geringem Kraftaufwand zeigt Oobleck das Verhalten einer Flüssigkeit, während es unter Druck wie ein Feststoff verhärtet. Dies resultiert aus der Interaktion der Stärkepartikel mit dem Wasser, die bei Belastung eine feste Struktur bilden.

Die Namensgebung ist eine Referenz auf einen fiktiven Stoff aus dem Kinderbuch Bartholomew and the Oobleck von Dr. Seuss (1949).

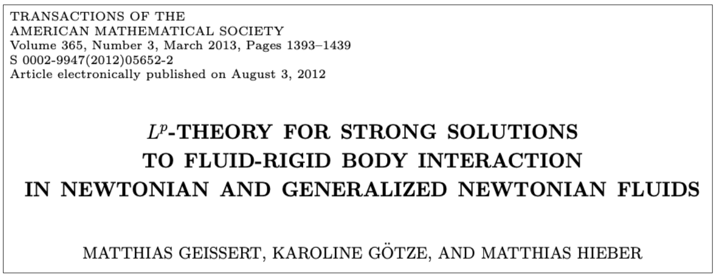
Aufgaben an Euch:

1) Nehmt einen Klumpen Oobleck in die Hand und drückt ihn fest zusammen. Öffnet dann langsam die Hand und beobachtet, wie sich das Oobleck verhält.

2) Legt eine Münze in den Behälter mit dem Oobleck. Wer kann die Münze am schnellsten herausholen?

3) Schlagt (nicht zu fest) mit einem Hammer auf das Oobleck. Was stellt Ihr fest?

Mathematische Forschung in unserer Arbeitsgruppe


TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 365, Number 3, March 2013, Pages 1393–1439
S 0002-9947(2012)05652-2
Article electronically published on August 3, 2012

L^p-THEORY FOR STRONG SOLUTIONS TO FLUID-RIGID BODY INTERACTION IN NEWTONIAN AND GENERALIZED NEWTONIAN FLUIDS

MATTHIAS GEISSERT, KAROLINE GÖTZE, AND MATTHIAS HIEBER

Abb. 1: Die Bewegung eines Festkörpers in nicht-Newtonschen Fluiden kann durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Zu deren Lösungen werden in unserer Arbeitsgruppe neue analytische Methoden entwickelt.

Partikelablagerung in Fluiden

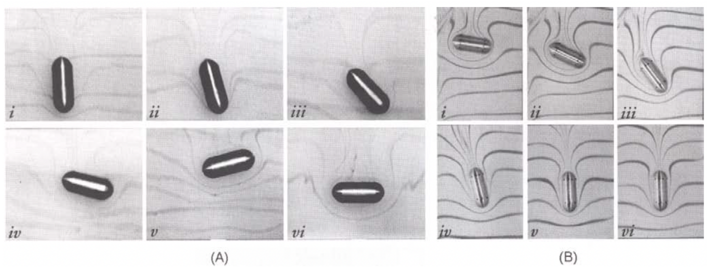


Abb. 2: Partikelablagerung ist die Anordnung von Partikeln im freien Fall. Für zylindrische Partikel hängt das Ablagerungsverhalten von der Art des Fluids ab: Im Newtonschen Fall (A) ergibt sich eine horizontale Anordnung, während die Anordnung im nicht-Newtonschen Fall (B) vertikal ist.

Twisty Puzzles:

Trillionen Möglichkeiten, nur eine Lösung

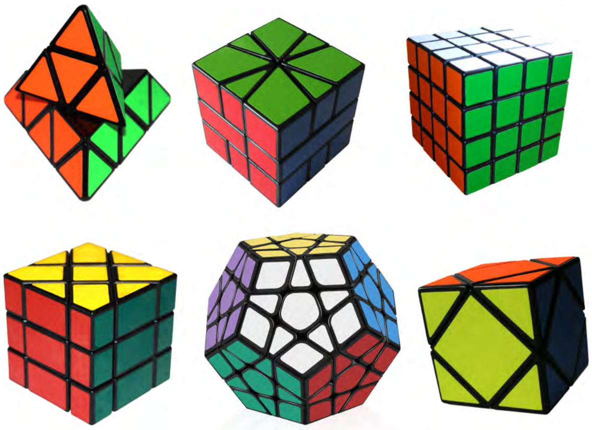
Lange Nacht der Mathematik 2025

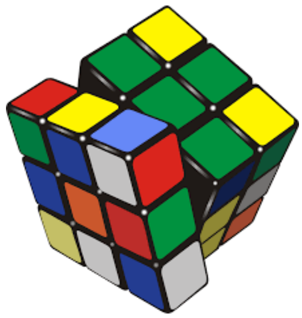
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Twisty puzzles

Twisty puzzles, auch als Drehpuzzles bekannt, bestehen aus mehreren beweglichen Einzelteilen. Das Ziel dieser Geduldsspiele ist, durch eine geeignete Abfolge von Drehungen einen bestimmten Zielzustand zu erreichen.

Das bekannteste Twisty puzzle ist der *Rubik's Cube*, auch Zauberwürfel genannt, der 1974 von Ernő Rubik, einem ungarischen Künstler und Architekturprofessor, erfunden wurde.





Die Mathematik des Zauberwürfels

Die *Rubik's Cube-Gruppe* ist ein mathematisches Objekt $(G, \cdot)$, das die Struktur des Zauberwürfels repräsentiert. Jedes Element der Gruppe entspricht einer Stellung des Würfels, die aus einer Kombination von Drehungen der einzelnen Seiten entsteht. Insgesamt gibt es

$$43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000$$

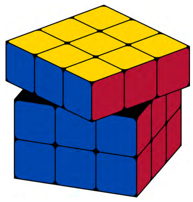
solche Stellungen des Würfels.

Den Zauberwürfel lösen

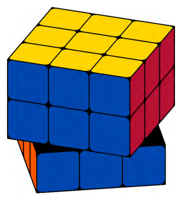
Ein bekannter Lösungsalgorithmus für den Zauberwürfel stammt von Thistlethwaite. Dabei werden die möglichen Positionen des Würfels in vier Klassen unterteilt, die dann mit wenigen verschiedenen Drehungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \text{Kombinationen von } \{L, R, F, B, U, D\} &\rightarrow \\ \text{Kombinationen von } \{L, R, F, B, U^2, D^2\} &\rightarrow \\ \text{Kombinationen von } \{L, R, F^2, B^2, U^2, D^2\} &\rightarrow \\ \text{Kombinationen von } \{L^2, R^2, F^2, B^2, U^2, D^2\} &\rightarrow \text{ gelöster Zustand} \end{aligned}$$

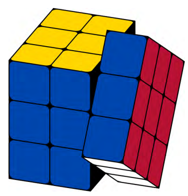
Die möglichen Drehungen des Rubik's Cube



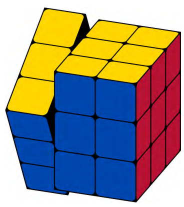
U



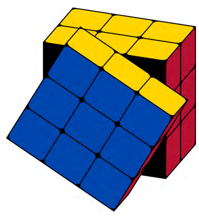
D



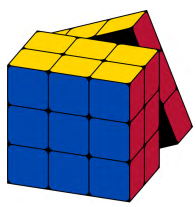
R



L



F



B

God's number

Als „**God's number**" wird die maximale Anzahl der Züge bezeichnet, die man benötigt, um den Würfel von einer beliebigen Position zu lösen. Im Jahr 2010 bewiesen Davidson, Dethridge, Rokicki und Kociemba mit Hilfe des Computers folgendes Resultat:

$$\text{God's number} = 20.$$

Der Beweis verwendet eine Verbesserung von Thistlethwaites Algorithmus durch den Darmstädter Gymnasiallehrer Herbert Kociemba von 1992. Statt vier benötigt diese nur noch zwei Klassen („two-phase algorithm"). Auch wenn dies die Anzahl der nötigen Berechnungen reduzierte, wurden dennoch 35 CPU-Jahre Rechenleistung für den Beweis benötigt. Für komplexere twisty puzzles ist God's Number weiterhin unbekannt.

$$\begin{gathered} \text{Kombinationen von } \{U, D, L, R, F, B\} \\ \downarrow \\ \text{Kombinationen von } \{U, D, L^2, R^2, F^2, B^2\} \\ \downarrow \\ \text{gelöster Zustand} \end{gathered}$$

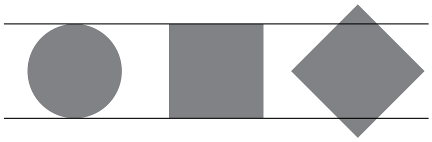
Eckig kann auch rollen

Lange Nacht der Mathematik 2025

Flächen konstanter Breite

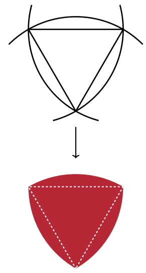
Flächen konstanter Breite sind Flächen in der Ebene, die in jeder Richtung gleich breit sind. Intuitiv bedeutet dies Folgendes: Klemmt man die Fläche zwischen zwei parallele Geraden, haben diese immer den gleichen Abstand, unabhängig von der Richtung. Flächen konstanter Breite lassen sich also zwischen zwei parallelen Geraden genauso glatt rollen wie ein Kreis.

Die einfachste Fläche konstanter Breite ist ein Kreis: In jeder Richtung ist seine Breite genau sein Durchmesser. Im Gegensatz dazu hat ein Quadrat zwar vertikal und horizontal die gleiche Breite, diagonal aber nicht.



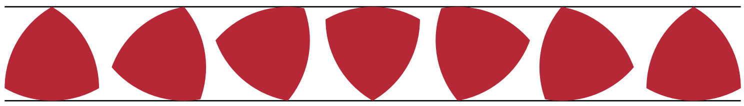
Gibt es außer dem Kreis überhaupt noch Flächen konstanter Breite?

Das Reuleaux-Dreieck

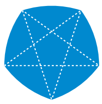


Überraschenderweise ist die Antwort auf diese Frage ja; es gibt sogar unendlich viele andere Flächen, die auch in alle Richtungen gleich breit sind. Die einfachste solche Fläche ist das *Reuleaux-Dreieck*. Benannt ist es nach dem deutschen Ingenieur Franz Reuleaux, der im 19. Jahrhundert maßgeblich zur Entwicklung des Reuleaux-Dreiecks für mechanische Anwendungen beitrug.

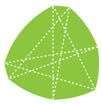
Das Reuleaux-Dreieck kann aus einem gleichseitigen Dreieck konstruiert werden, indem man je zwei benachbarte Eckpunkte mit einem Kreisbogen verbindet, dessen Mittelpunkt der gegenüberliegende Eckpunkt ist. Äquivalent ist das Reuleaux-Dreieck genau die Schnittmenge dieser drei Kreise. Unter allen Flächen konstanter Breite hat das Reuleaux-Dreieck die kleinste Fläche, während der Kreis die größte hat [1, 2].



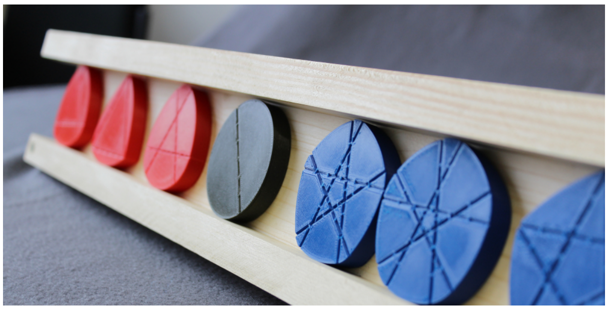
Reuleaux-Polygone und Meißner-Polyeder



Die Konstruktion des Reuleaux-Dreiecks lässt sich verallgemeinern zu *Reuleaux-Polygonen*, die aus endlich vielen aneinandergesetzten Kreisbögen bestehen. So lässt sich jedes regelmäßige n-Eck mit ungeradem n analog zum Reuleaux-Dreieck zu einer Fläche konstanter Breite ergänzen, es gibt aber auch unregelmäßige solche Flächen.



Genau wie das Reuleaux-Dreieck lassen sich Reuleaux-Polygone als Schnittfläche von Kreisen auffassen. Es gibt jedoch auch andere Flächen konstanter Breite, die nicht von Kreissegmenten begrenzt sind.



Flächen konstanter Breite lassen sich auf drei oder mehr Dimensionen verallgemeinern. Im Dreidimensionalen lassen sich neben Kugeln z.B. auch sogenannte *Meissner-Polyeder* glatt zwischen zwei parallelen Ebenen rollen. Auch diese Körper sparen im Vergleich zur Kugel gleicher Breite Material. Es ist aber unbekannt, welche Körper konstanter Breite das kleinste Volumen haben.

Aktuelle Forschung in höheren Dimensionen

Oded Schramm fragte 1988, wie viel Material man in höherdimensionalen Räumen im Vergleich zur Kugel sparen kann. Mathematisch formalisiert stellte er die Frage:

> Kann man in *jeder* Dimension einen Körper konstanter Breite konstruieren, dessen Volumen exponentiell kleiner ist als das Volumen der Kugel?

Wie Reuleaux-Polygone sind auch Meißner-Polyeder Teilmengen des Schnittkörpers mehrerer Kugeln. Einen ähnlichen Ansatz verfolgten 2024 fünf Forscher, um höherdimensionale Körper konstanter Breite mit kleinem Volumen zu konstruieren [3].

Sie beginnen mit einer initialen Menge von Punkten und zeichnen dann um jeden der Punkte eine Kugel. Anschließend konzentriert man sich auf die Geometrie ihrer Schnittmenge, um darin einen Körper konstanter Breite zu finden. Die Forscher experimentierten mit verschiedenen Initialmengen, bis sie eine unendliche Initialmenge fanden, die genau einen Körper konstanter Breite definiert.

Theorem ([3]). *Für jede Dimension n existiert ein Körper $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konstanter Breite 1, dessen Volumen höchstens das $0{,}9^n$-fache des Volumens der n-dimensionalen Kugel mit Durchmesser 1 beträgt.*

Anwendungen

In niedrigen Dimensionen wurden die Reuleaux-Polygone bereits auf verschiedene Weise eingesetzt:

- Bohraufsätze in Form eines Reuleaux-Dreiecks eignen sich zum Bohren quadratischer Löcher: Ein Reuleaux-Dreieck kann innerhalb eines Quadrats rotieren und deckt beim Rotieren fast das gesamte Quadrat ab.
- Münzen haben oft konstante Breite, damit Münzautomaten den Münztyp leicht an der Breite ertasten können. So sind etwa britische 20- und 50-Pence-Münzen Reuleaux-Siebenecke.

Referenzen

[1] H. Lebesgue, Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante. *Bull. Soc. Math. France* (7) 4 (1921)67–96.

[2] W. Blaschke, Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts, *Math. Ann.* 76 (1915)504–513. doi:10.1007/BF01458221

[3] A. Arman, A. Bondarenko, F. Nazarov, A. Prymak, D. Radchenko, Small volume bodies of constant width. *arXiv preprint* (2024) arXiv:2405.18501.

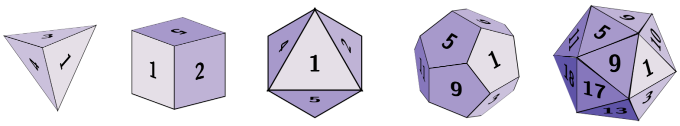
Rate, Schätze, Gewinne:

Wie viel Abweichung vom Durchschnitt lohnt sich?

Lange Nacht der Mathematik 2025

Ziel des Spiels

Wir würfeln mit jedem der unten abgebildeten fünf Würfel zwei Mal und addieren die Ergebnisse.



Unter allen, die die gewürfelte Zahl korrekt getippt haben, wird zufällig ausgewählt, wer gewinnt. Die abgebildeten Würfel sind die platonischen Körper.

Platonische Körper

Platonische Körper sind Polyeder mit der größtmöglichen Symmetrie. Das heißt, zu jedem beliebigen Paar von Kanten, Ecken oder Flächen gibt es eine symmetrieerhaltende Abbildung, die diese vertauscht.

Die fünf platonischen Körper und ihre Flächenanzahl sind:

Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
4	6	8	12	20

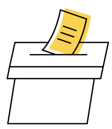
Mehr über die platonischen Körper könnt ihr an der Station zur *Polyederformel* erfahren.

Spielregeln

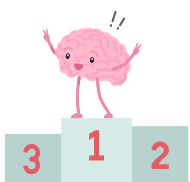
1. Wähle eine natürliche Zahl n zwischen 1 und 100 aus.

2. Trage n zwei Mal auf dem Loszettel ein.

3. Wir teilen den Loszettel auf: Eine Hälfte behältst du, die andere Hälfte kommt in unsere Spielurne zur Auswertung.



4. Um 19:45 Uhr werden im Hörsaal S105|122 (einfach ein Stockwerk über uns) die Würfel fallen, und wir verleihen die Preise unter den dort Anwesenden.



Voraussetzungen: Die Teilnahme ist bis 19:30 Uhr möglich und jede Person darf höchstens ein Mal teilnehmen.

Interessante Fragen zum Spiel

- Welche Würfelergebnisse kannst du sicher ausschließen?
- Welches Würfelergebnis erwartest du im Durchschnitt?
- Warum könnte es sich lohnen vom diesem Erwartungswert abzuweichen? Und wie viel Abweichung lohnt sich?
- Welche geometrischen Eigenschaften machen einen Körper zu einem *fairen* Würfel?
- Gibt es andere *faire* Würfel als die fünf platonischen Körper?

Preisverleihung

Wir werden um 19:45 Uhr live im Hörsaal würfeln und die Ergebnisse aufsummieren. Ihr könnt direkt mitfiebern, wie nah eure getippte Zahl an dem Ergebnis liegt.
Das Zufallsexperiment wiederholen wir drei Mal.
Zu gewinnen gibt es drei spannende Bücher über Mathematik. Die Gewinner der drei Experimente dürfen jeweils der Reihe nach ein Buch auswählen. Zur Auswahl stehen

- *Das BUCH der Beweise*: eine Sammlung besonders eleganter mathematischer Beweise,
- *Pi Mal Daumen*: ein Roman über eine ungewöhnliche Frau, die sich heimlich den Traum eines Mathematikstudiums erfüllt,
- *Mathematik in 30 Sekunden*: ein bunter Ausflug in die faszinierende Welt der Mathematik.

Viel Spaß!

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Didaktik

Die lange Nacht der Mathematik

Die Einstein-Kachel

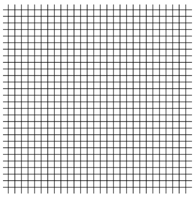
Lange Nacht der Mathematik 2025

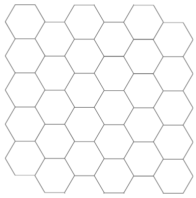
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

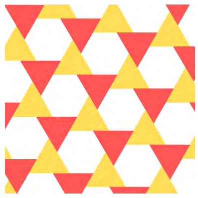
Kachelungen der Ebene

Die Geschichte der Kachelungen der Ebene reicht Jahrhunderte zurück und durchzieht den Wandteppich der Mathematik sowie der Kunst. Die Ebene zu kacheln bedeutet im mathematischen Sinne das Bedecken der Ebene (einer unendlichen flachen Oberfläche) mit sich nicht überlappenden Kacheln, ohne dabei Lücken zu lassen. Dabei gibt es verschiedene Unterarten von Kachelungen, welche in der Mathematik ausgiebig untersucht wurden. Zu den wichtigsten gehören: regelmäßige Kachelungen (nur aus regelmäßigen n-Ecken), semireguläre Kachelungen (aus verschiedenen regelmäßigen n-Ecken), quasireguläre Kachelungen und so weiter.


Dreiecksgitter


Quadratgitter

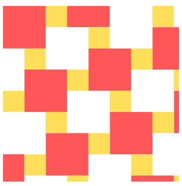

Sechsecksgitter

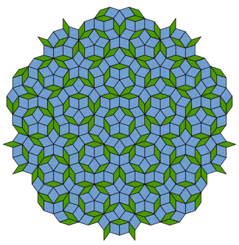

Semireguläre Parkettierung

Periodische und aperiodische Kachelungen

Eine **periodische Kachelung** ist eine Kachelung einer unendlichen ebenen Fläche, die sich in regelmäßigen Abständen wiederholt. Mit anderen Worten: Das Kachelmuster setzt sich unendlich fort, und man kann das gesamte Muster um eine bestimmte Strecke verschieben, ohne das Muster zu verändern. Das bedeutet, dass die Kacheln eine **Translationssymmetrie** zulassen. Beispiele für periodische Kachelungen sind die Quadratgitter, das Dreiecksgitter oder das Sechsecksgitter.

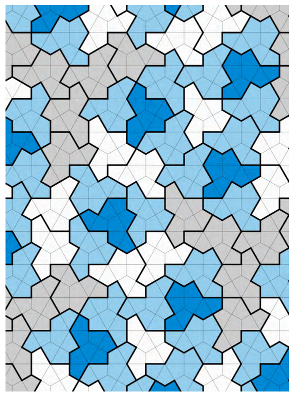
Eine **aperiodische Kachelung** lässt keine Translationssymmetrie zu. 1961 stellte der Logiker Hao Wang die Vermutung auf, dass, wenn eine endliche Menge von Formen die Ebene kacheln kann, dies auch periodisch möglich ist. Sieben Jahre später wurde er jedoch von seinem Doktoranden Robert Berger widerlegt. Dieser hatte ein Set von ca. 20 000 Formen konstruiert, von denen er beweisen konnte, dass sich mit ihnen zwar die Ebene kacheln lässt, dies aber nur aperiodisch. 1974 verbesserte Roger Penrose diese Schranke erheblich, als er entdeckte, dass auch schon zwei Formen ausreichen, um eine aperiodische Kachelung zu erzwingen.





Die Einstein-Kachel

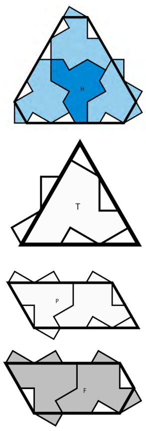
Offen blieb die Frage, ob es auch eine einzige Form gebe, mit der sich die Ebene nur aperiodisch kacheln lässt. Für eine solche Form hat sich international der Begriff **Einstein-Kachel** durchgesetzt, eine Anspielung an den deutschen Begriff *ein Stein*. Die Antwort auf die Frage nach der Existenz einer Einstein-Kachel wurde im Jahr 2023 von Smith, Myers, Kaplan und Goodman-Strauss gegeben. Smith, ein pensionierter Drucktechniker und Hobby-Mathematiker, ging einer seiner Lieblingsbeschäftigungen nach, er spielte mit Formen, als er eine Form fand, die er nun **Hut** oder **T-Shirt** nannte und die eine Kachelung ergab, die er zuvor noch nicht gesehen hatte. Nachdem er bekannten Geometern von seiner Entdeckung berichtete, gelang es ihnen zu beweisen, dass der Hut die Ebene kachelt, dies aber nur aperiodisch möglich ist.

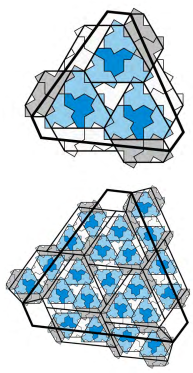


Die Einstein-Kachel ist aperiodisch

Der Beweis folgte einer Idee, die von Bergers Arbeit aus den 1960er Jahren inspiriert war. Dieser zeigte, dass seine Formen immer in größen Mustern vorkommen mussten, die sich wiederum in größeren Kopien ihrer selbst befinden mussten, sodass jede Kachelung der ebene eine **hierarchische Struktur** haben musste.

Myers leitete den Prozess ein, indem er vier aus Hüten konstruierte Zwischenformen identifizierte, die als H, T, P und F bezeichnet werden. Myers zeigte, dass man durch die Kombination dieser vier Formen auf verschiedene Weise größere, komplexere Strukturen erzeugen kann. Zur Veranschaulichung könnte man ein größeres H erzeugen, indem man ein T mit drei H-Formen umgibt und dann diese Anordnung mit einer Mischung aus P- und F-Formen umgibt.





Dies bot eine Methode, um immer größere Hutmuster zu erstellen und so eine immer größere Hierarchie von ineinander verschachtelten Formen zu konstruieren. Die Wissenschaftler wiesen nach, dass sich die Muster, die sich aus diesen verschachtelten Konstruktionen ergeben, niemals wiederholen. Sie stellten auch fest, dass die Konstruktion dieser speziellen Hierarchien die einzige Methode zur Erstellung von Hutmustern ist!

Die Ergebnisse und Bilder stammen aus der arXiv Veröffentlichung "An aperiodic monotile" (2303.10798) von David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan und Chaim Goodman-Strauss (2023).

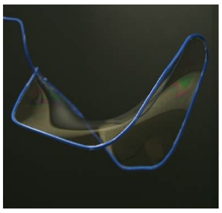
Geometrie in Natur und Technik

Lange Nacht der Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Natürliche Strukturen sind optimal

Kräfte formen natürliche Objekte zu einer optimalen Struktur. So wird ein Seifenfilm durch die Oberflächenspannung straff gezogen und erreicht ein stabiles Gleichgewicht, wenn sein Oberflächeninhalt kleiner ist als der Inhalt jeder nahen Fläche mit gleichem Rand. Gleichermaßen minimieren Seifenblasen den Inhalt einer Fläche, welche ein festes Volumen umschließt.



Der Architekt Frei Otto wandte dieses natürliche Konzept bei seinem berühmten Design des Olympia- parks in München von 1972 sowie auch beim Bahn-Projekt Stuttgart 21 an.

Das Plateau-Problem

Der belgische Physiker Joseph Plateau experimentierte im 19. Jahrhundert mit Seifenfilmen. Die zugehörige geometrische Fragestellung wurde bekannt als das **Plateau Problem**:

Finde zu einer vorgegebenen Randkurve die Fläche mit minimalem Flächeninhalt.

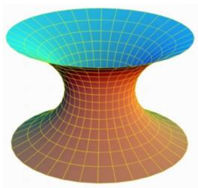
Douglas und Rado bewiesen 1930 unabhängig voneinander die Existenz einer solchen Fläche. Douglas erhielt für seine Arbeiten 1936 die Fields-Medaille. Die Lösungen sind gegeben durch **Minimalflächen**. Diese sind charakterisiert durch eine überall verschwindende mittlere Krümmung $H = 0$.

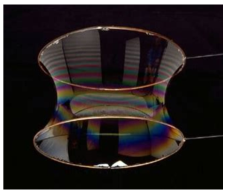
Beispiele für Minimalflächen

Im Laufe der Jahre wurde eine Vielzahl an Minimalflächen gefunden. Hier ein paar Beispiele:

Das Katenoid

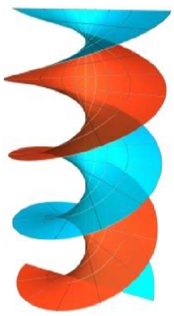
Das Katenoid, 1741 von Euler entdeckt, entsteht durch Rotation einer Kettenlinie. Unter allen solchen **Rotationsflächen** ist es die einzige Minimalfläche und löst das Plateau-Problem für zwei koaxiale Kreise.

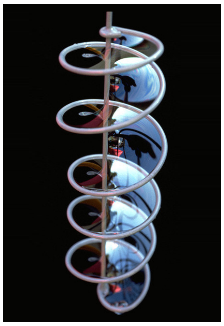




Das Helikoid

Das Helikoid wurde 1776 von Meusnier entdeckt. Es entsteht durch Windung einer Geraden um eine Rotationsachse. Solche Flächen, die nur aus Geraden bestehen, nennt man auch **Regelflächen**





Das Gyroid

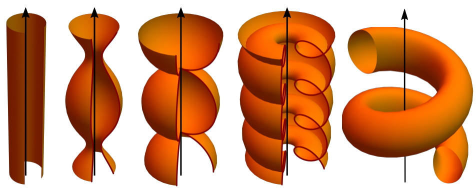
Das Gyroid, im Jahr 1970 von Schoen entdeckt, ist eine dreifach periodische Minimalfläche. Es beinhaltet keine Geraden (Osserman 1986) und keine Selbstschnitte (Große-Brauckmann/Wohlgemuth 1996). Die Klassifizierung solcher **TPMS-Flächen** (Triply Periodic Minimal Surface) ist ein offenes Problem.

CMC-Flächen

Lösungen der verwandten Fragestellung, Flächen minimalen Inhalts zu finden, welche ein festes Volumen umschließen, sind **CMC-Flächen** (Constant Mean Curvature) mit konstanter Krümmung H = const. $\neq 0$.

Delaunay untersuchte 1841 CMC-Rotationsflächen. Diese nach ihm benannten Delaunay-Flächen sind **Zylinder**, **Unduloid**, **Sphäre** und **Nodoid**.

Untersucht man CMC-Flächen nicht im euklidischen Raum, sondern in gekrümmten Räumen, tritt unter den Delaunay-Flächen eine neue Art von Fläche auf: **CMC-Tubes** (rechts im Bild). Diese Flächen sind Gegenstand der aktuellen Forschung.



Anwendungen

Minimalflächen und CMC-Flächen haben sich zu einem intensiven Forschungsgebiet mit vielen Anwendungen entwickelt. Dank ihrer optimalen Form spielen sie eine wichtige Rolle in der molekularen Biotechnologie, den Materialwissenschaften und der Zellbiologie. In der allgemeinen Relativitätstheorie bilden sie einen krümungsbasierten Zugang zur Untersuchung der Ränder von schwarzer Löchern.

Referenzen

[1] T. H. Colding, W. P. Minicozzi, In Search of Stable Geometric Structures, *Notices of the AMS* **12** (2019).
[2] T. H. Colding, W. P. Minicozzi, A Course in Minimal Surfaces, AMS, Providence (2011).
[3] P. Käse, *Screw motion surfaces of constant mean curvature in homogeneous 3-manifolds* (2022), preprint.
[4] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Dover Publication, New York (1986).

Bildquellen:
Bild 1 (links) Mit freundlicher Genehmigung von Jon Jacobsen. Bild 1 (rechts) Jean Siméon Chardin, öffentlich zugänglich . Bild 2 Mit freundlicher Genehmigung von Tiia Monto. Bild 3 (links) Mit freundlicher Genehmigung von of Matthias Weber. Bild 3 (rechts) Exploratorium. Bild 4 (links) Mit freundlicher Genehmigung von Matthias Weber. Bild 4 (rechts) Exploratorium. Bild 5 Mit freundlicher Genehmigung von Bathsheba Grossman. Bild 6 Illustration des Authors.

Kürzeste auf der Erde

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Erde?

Diese Frage ist für uns alle relevant, da durch die Kenntnis der kürzesten Strecke Energie- und Zeitersparnisse möglich sind. Insbesondere gilt dies für die Luft- und Schifffahrt, da durch eine suboptimale Route potentiell siginifikant höhere ökonomische und ökologische Folgen zu tragen sind. Um die folgenden Berechnungen zu vereinfachen und uns auf die grundlegende Geometrie zu konzentrieren, vernachlässigen wir die Unebenheit der Erdoberfläche. Das heißt wir fassen die Erde nun als idealisierte Kugel auf. Ziel dieser Station ist es, eine Charakterisierung aller kürzesten Strecken auf einer Kugel zu erhalten. Diese Fragestellung wird im folgenden Abschnitt mathematisch modelliert.

Mathematische Modellierung

Ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ liegt auf einer Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, falls er in der Menge

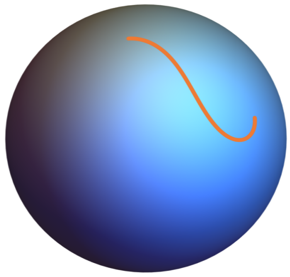
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \ .$$

liegt. Seien nun A und B zwei Punkte auf der (Erd-)kugel, dann kann man eine beliebige Verbindung von A nach B auf K als Kurve $c(t)$ darstellen. Hierbei ist c eine stetige Funktion $c : [0, 1] \mapsto K$, die $c(0) = A$ und $c(1) = B$ erfüllt. Nun suchen wir unter allen Kurven c von A nach B diejenige Kurve c^* mit minimaler Länge. Die Kürzeste erfüllt also

$$L\left(c^*\right) \leq L\left(c\right) \quad \text{für alle Kurven } c \text{ von } A \text{ nach } B\ ,$$

wobei $L(c)$ die Länge der Kurve c angibt.

Beispiel einer Kurve auf einer Kugeloberfläche



Die Gerade ist nicht immer der schnellste Weg

In einer Ebene ist es schnell ersichtlich, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten A und B durch die Verbindungsstrecke gegeben ist. Im Fall von Kürzesten auf einer Kugel reicht es dagegen nicht aus, die Punkte A und B auf einer Karte der Erde, also einer Projektion der Kugeloberfläche in die Ebene, zu verbinden. Dies kann man zum Beispiel an der kürzesten Strecke zwischen Frankfurt und San Francisco erkennen. Dafür sind in der Karte rechts die gerade Verbindungsstrecke (in Gelb) und die Kürzeste (in Rot) eingezeichnet. Die Kürzeste wurde hierbei durch das Einspannen eines Fadens zwischen dem Start- und Endpunkt auf einem Globus erhalten und dann auf die Karte projiziert. Es fällt auf, dass die kürzeste Kurve in Rot augenscheinlich deutlich länger als die gelbe Kurve ist. Diese Diskrepanz resultiert aufgrund der Kartenprojektion, die eine Verzerrung der Längenverhältnisse erwirkt.

Einmal über den Atlantik

Mathematische Auflösung

Durch das oben beschriebene Einspannen eines Fadens erkennt man, dass die Kürzeste eine Teilmenge eines Kreises ist, der die Punkte A und B enthält. Dies ist auch anhand von Abbildung 1 leicht ersichtlich. An Abbildung 2 sehen wir, dass Kreise als Schnitt der Kugel mit einer Ebene erzeugt werden können. Allerdings existieren unendlich viele Ebenen, die als Schnittebene verwendet werden können. Um diejenige Ebene auszuwählen, deren Schnitt mit der Kugel die Kürzeste enthält, berechnen wir die Länge des Weges von A und B, die jede Ebene induziert. Abbildung 3 visualisiert in Rot den Teil eines Kreisbogens mit Radius r. Dieser Radius wird durch die Wahl der Schnittebene festgelegt. Mithilfe von trigonometrischen Argumenten und Abbildung 3 lässt sich die Länge des roten Kreissegmentes als

$$d^*_{A,B}\left(r\right) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{2\varphi(r)}{360^\circ} = r * \frac{\pi}{90^\circ} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{||A - B||}{2 \cdot r}\right)$$

angeben. Die Funktion d^* ist in Abbildung 4 zu sehen. Wir erkennen, dass sich die Länge des Kreissegmentes reduziert, je grösser der Radius ist. Da es keine Kreise gibt, deren Radius den Kugelradius übertreffen, wird der Abstand zwischen zwei Punkten minimiert, indem der Radius des Kreises r dem Radius der Kugel R entspricht. Daraus folgt, dass die Schnittebene den Kugelmittelpunkt enthält. Schnittkreise, die diese Zusatzbedingung erfüllen, werden auch Großkreise genannt. Somit sind kürzeste Verbindungen auf einer Kugel immer Teilmengen von Großkreisen.

Abbildung 1

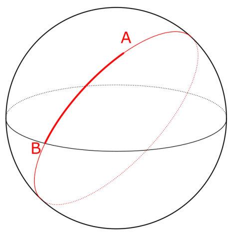


Abbildung 3

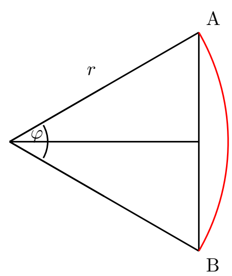


Abbildung 2

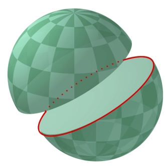
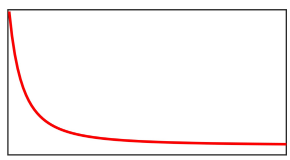


Abbildung 4



Quellen: Die Grafik für „Beispiel einer Kurve auf der der Kugeloberfläche“ sowie die Abbildungen 3 und 4 sind selbst generiert. Die Grafik zu „Einmal über den Atlantik“ wurde mit Hilfe von https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/kuerzesteverbindung.htm erzeugt und die Abbildungen 1 und 2 sind unter https://de.wikiversity.org/wiki/Datei:Great_circle_passing_through_two_points.svg bzw. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_circle_hemispheres.png zu finden und wurden unter den dort einsehbaren Lizenzen verwendet.

Die lange Nacht der Mathematik

Karten der Erde

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Karten einer Fläche

Eine *Karte* einer Fläche ist eine 1:1-Abbildung f von einer Teilmenge der Fläche in $\mathbb{R}^3$ auf eine Teilmenge U einer Ebene. Wir möchten *differenzierbare* Karten betrachten, d.h. die Umkehrabbildung $f^{-1}: U \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar und an jeden Punkt der Fläche kann man in erster Ordnung eine Ebene (*Tangentialebene*) anlegen.

Besondere Karten

Um Abstände auf der Erde (ungefähr eine Kugeloberfläche) korrekt mit einer Karte abzubilden, wäre eine längentreue Karte ideal. Leider gibt es diese aber **nicht**, siehe ganz rechts.

Hier am Stand lernen Sie auch, dass der **Abstand** (die kürzeste Verbindung) zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche die **Länge des Großkreisbogens** ist, der die beiden Punkte verbindet. Der Abstand ist damit immer kleiner oder gleich πR, wobei R der Radius der Kugel ist.

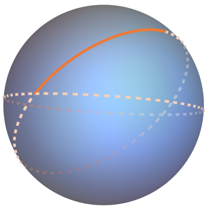
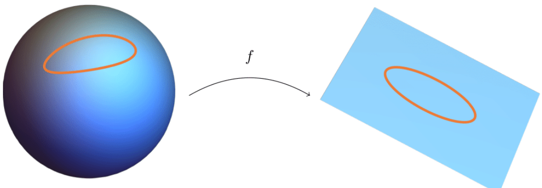


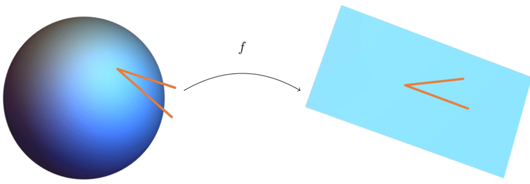
Bild: Distanzen auf einer Kugeloberfläche sind Längen von Großkreisbögen

Flächentreue Karte



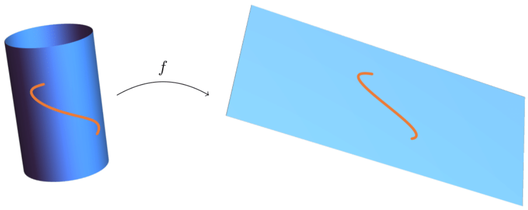
Eine Karte f heißt *flächentreu*, wenn jede Teilmenge V der Fläche denselben Flächeninhalt hat wie $f(V)$. Im obigen Beispiel ist V das ellipsenartige Flächenstück links und $f(V)$ die Fläche, die von der Ellipse rechts berandet wird.

Winkeltreue Karte



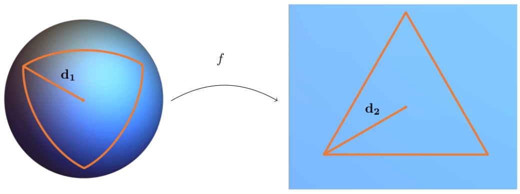
Winkeltreu heißt eine Karte dann, wenn die Winkel zwischen Tangentialvektoren von Kurven auf der Fläche (dies sind Geradenstücke) erhalten bleiben, wenn man ihre Bilder unter f betrachtet.

Längentreue Karte



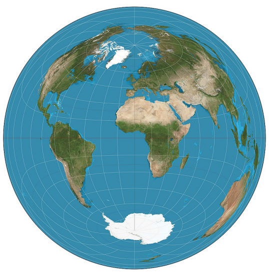
Eine Karte heißt *längentreu*, wenn jede Kurve c auf der Fläche dieselbe Länge wie $f(c)$ (also die zugehörige Kurve in U) hat.

Keine längentreue Karte der Kugeloberfläche



Wenn es eine längentreue Karte f eines Kugeloberflächenstückes gäbe, so wähle man darin drei Punkte, die voneinander dieselbe Distanz (= Länge des Großkreisbogens, der zwei Punkte verbindet) haben. Hier im Bild haben die drei Punkte die Entfernung $\frac{\pi}{2}R$, wobei R der Radius der Kugel ist. Da f nach Annahme längentreu ist, müssen auch die drei Bilder der Ecken unter f dieselbe Distanz in der Ebene (= Länge der geraden Strecke zwischen Punkten) haben. Nun finden wir in diesen beiden „Dreiecken" einen weiteren Punkt, der von allen Ecken denselben Abstand $\mathbf{d_1}$ bzw. $\mathbf{d_2}$ hat. Wir berechnen, dass dieser Abstand $\mathbf{d_1}$ im Urbild ca. $0,9553 \cdot R$ ist, und der im Bild $\mathbf{d_2} \approx 0,9069 \cdot R$ erfüllt. Insbes. $\mathbf{d_1} \neq \mathbf{d_2}$ und somit war f doch nicht längentreu.

Lambert-Karte (flächentreu)



© Daniel R. Strebe, 15. August 2011

Die Lambert-Karte (1772) ist eine flächentreue Karte der Erde, das heißt zum Beispiel, dass Länder mit ihrer tatsächlichen Größe abgebildet werden. Der Preis dafür ist jedoch, dass die Form der Länder nicht der Realität entspricht. So werden zum Beispiel Regionen am Rand der Karte sehr stark in die Länge gezogen.

Zu beachten ist hier, dass der gegenüberliegende Punkt des Mittelpunkts der Karte nicht auf einen Punkt abgebildet wird, sondern auf den ganzen Rand der Karte. Viele Karten haben ihren Mittelpunkt in Europa, sodass z.B. Australien sehr verzogen dargestellt wird. Legt man den Mittelpunkt nach Australien, bekommt man eine sehr gute Karte für eben genau diesen Bereich.

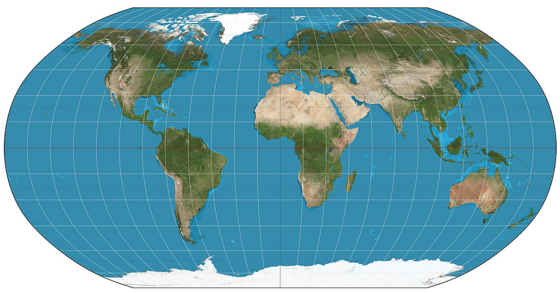
Mercator-Karte (winkeltreu)

© Daniel R. Strebe, 16. December 2011

Die Mercator-Karte (1569) ist eine winkeltreue Karte der Erde und wird über eine sogenante *Zylinder-Projektion* konstruiert. Es handelt sich hierbei allerdings nicht um eine optische Projektion, das heißt, sie lässt sicht nicht als Lichtstrahlen von einem Punkt ausgehend visualisieren, sondern ist mittels einer mathematischen Vorschrift konstruiert.

Zwar werden Regionen nahe der Pole sehr groß dargestellt, dafür stimmt die Form der Länder lokal mit ihrer tatsächlichen Form überein. Diese Karte eignet sich inbesondere für Seefahrende sehr gut, denn ein konstanter Kurs ist auf der Mercator-Karte eine gerade Verbindung. Diese Verbindungen heißen *Loxodrome* und ihr Längen sind nahe an denen der Großkreisbögen dran.

Robinson-Karte (vermittelnd)



© Daniel R. Strebe, 15. August 2011

Die Robinson-Karte (1963) ist weder flächentreu noch winkeltreu. Dafür ist sie aber fast überall nah dran und stellt einen Kompromiss zwischen beiden Eigenschaften dar. Sie ist nicht mithilfe einer mathematischen Formel konstruiert, sondern anhand von vielen Messdaten.

Im Gegensatz zu vielen anderen Karten, ist auf der Robinson-Karte die ganze Erdoberfläche abgebildet. Dabei werden allerdings die Pole nicht auf einen Punkt sondern auf ein Geradenstück abgebildet.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Geometrie;
P. Binder, S. Eisenbach, E. Mäder-Baumdicker, N. Neumann

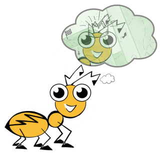
Die lange Nacht der Mathematik

Die Kürzeste Station:
Der große Krabbel-Kontest
Lange Nacht der Mathematik 2025

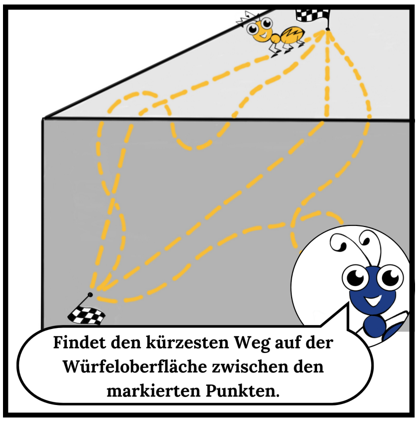
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Motivation

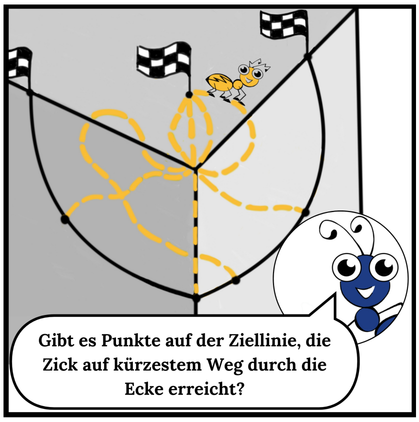
Das Auffinden kürzester Wege zwischen zwei Orten ist ein alltägliches Problem: Wie weit liegen entfernte Orte auseinander? Wie kommt man in einem engen örtlichen Straßenraster am schnellsten von A nach B? Manchmal ist dies ein Teilproblem in einem größeren Zusammenhang, wie z.B. bei der Verlegung von Leitungsnetzen oder bei der Verdrahtung von Chips. Auch in abstrakterem Kontext ist das Problem in den Naturwissenschaften allgegenwärtig: Das Prinzip der Energie-Minimierung läuft auf das Aufsuchen kürzester Wege in geeigneten Räumen hinaus.
Um die zugrunde liegenden Prinzipien aufzuspüren, befasst man sich in der Mathematik gern mit den einfachsten, prinzipiellen Situationen. Als Beispiel betrachten wir in unserer Station die Oberflächen von Polyedern, speziell die Würfeloberfläche. Darauf werden kürzeste Verbindungskurven zwischen verschiedenen Punkten gesucht.



1. Trainingseinheit: Kanten



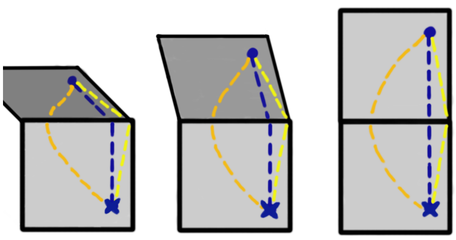
2. Trainingseinheit: Konvexe Ecken



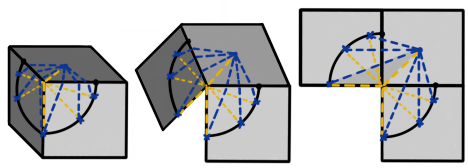
3. Trainingseinheit: Konkave Ecken

Kurz gedacht - Kürzer gemacht!

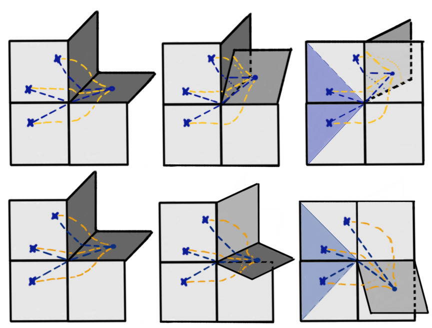
(1) Jede Teilstrecke, die Zick auf einer Fläche des Würfels zurücklegt, muss ein Geradenstück sein, denn dies ist in der Ebene die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Aber welchen Punkt sollte Zick auf dem Rand der Startfläche anvisieren? Beim Aufklappen des Würfels entlang einer Kante ändern sich die Längen der zurückgelegten Wege von Zick nicht. Daher entspricht die kürzeste Verbindung in Trainingseinheit 1 gerade der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten im aufgeklappten Würfelnetz.



(2) In dieser Trainingseinheit wollen wir verstehen, warum es keinen Punkt auf der Ziellinie (zwischen den beiden Fahnen) geben kann, den Zick über die Ecke auf kürzestem Weg erreicht. Tatsächlich laufen kürzeste Verbindungen auf dem Würfel niemals über eine Ecke.
Wir wissen, dass in jeder Würfelecke drei Quadrate zusammenkommen, nicht vier wie in der Ebene. Deshalb kann man einen Würfel rund um die Ecke auf verschiedene Weisen aufklappen. Bei geschicktem Aufklappen wird jeder Punkt der Ziellinie auf einem Nachbarquadrat zur Startfläche dargestellt. Nach Trainingseinheit 1 führt eine geradlinige Verbindung am kürzesten dorthin. Sämtliche Verbindungsstrecken treffen die Ecke aber nicht! Ein Weg über die Ecke ist daher ein Umweg.



(3) In der letzten Trainingseinheit beschäftigen wir uns mit einer anderen Art Ecke. Das L-förmige Objekt besitzt eine Ecke, in der 5 Quadrate zusammenkommen. Hier schneiden wir die 5 Quadrate rund um die Ecke auf zwei verschiedene Weisen auf, um kürzeste Wege auf einem ebenen Netz zu suchen.
Nehmen wir an Zick läuft vom Startpunkt aus vorschriftsgemäß über Kanten geradeaus rüber, aber nicht durch die Ecke. Dann kann er den blau eingefärbten Bereich nicht erreichen. Also muss Zick für Zielpunkte in diesem Bereich durch die Ecke laufen! Die kürzeste Verbindung zu Punkten in dem blauen Bereich besteht dann aus zwei Geradenstücken, die Start und Ziel über die Ecke verbinden.



Zusatz-Knobelei

Ist euch aufgefallen, dass es in **Trainingseinheit 2** einen Punkt gibt, den Zick auf **verschiedenen kürzesten Wegen** erreichen kann? Kürzeste Wege sind nämlich nicht immer eindeutig!

1.) Welche Punkte kann Zick von einer **Flächenmitte** aus auf mehreren kürzesten Wegen erreichen? Wie viele Wege gibt es jeweils?
2.) Was ändert sich, wenn Zick in einer **Ecke** startet?

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Geometrie und Approximation

Die lange Nacht der Mathematik

Logik, Spiele, Strategien

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Logiken als formale Sprachen

Untersuchungsgegenstand der mathematischen Logik sind *formale* Sprachen zur Präzisierung mathematischer Sachverhalte. Ein einfaches Beispiel für mathematische Objekte sind *Graphen*, also Mengen von Punkten („Knoten"), von denen jeweils zwei durch eine Kante verbunden sein können. Als Beispiel für eine Sprache („Logik"), in der Aussagen über Graphen formalisiert werden können, lassen wir folgende Ausdrucksmöglichkeiten zu:

$\exists x$ („für einen Knoten x gilt…"),
$\forall x$ („für alle Knoten x gilt…"),
Exy („zwischen x und y ist eine Kante")
$x = y$ („x und y sind der gleiche Knoten")
$\neg$ („nicht") $\vee$ („oder") $\wedge$ („und")

In dieser Logik („erststufige Prädikatenlogik") sind zum Beispiel Aussagen wie

$$\exists x\, \forall y\, (x = y \vee Exy)$$

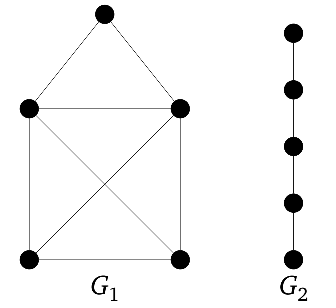
möglich. In natürlicher Sprache: Es gibt einen Knoten, der mit allen anderen Knoten verbunden ist. Im Beispielgraph G_1 ist das der Fall, im Graph G_2 nicht.

Uns interessieren nun Fragen wie:

- Wie können wir prüfen, ob eine Aussage in einem Graph gilt oder nicht?
- Ist es möglich, die Aussage „Der Graph kann ohne abzusetzen gezeichnet werden" (Haus vom Nikolaus) in dieser Logik auszudrücken?
- Wie kann man beweisen, dass es *nicht* möglich ist, eine bestimmte Eigenschaft in dieser Logik auszudrücken?

Als ein wichtiges Hilfsmittel zur Beantwortung dieser und weiterer Fragen werden in der Logik verschiedene Zweipersonenspiele verwendet. Zwei dieser Spiele, das Prüfspiel und das Vergleichsspiel, wollen wir hier vorstellen. Mit dem Vergleichsspiel kann man etwa zeigen, dass es *keinen* Satz in der von uns hier betrachteten Logik gibt, der in einem Graphen G genau dann erfüllt ist, wenn er wie das Haus vom Nikolaus ohne abzusetzen gezeichnet werden kann. Damit lassen sich beispielsweise grundsätzliche Beschränkungen der Datenbankabfragesprache SQL beweisen.

Beispiele für Graphen



im Netz

Lange Nacht der Mathematik

dieses Handout

Prüfspiele (Model Checking)

Beim Prüfspiel versucht Alice (die „Überzeugerin"), Bob (den „Zweifler") davon zu überzeugen, dass in einem gegebenen Graph eine Formel der Form

$$Q_1x_1\, Q_2x_2 \dots Q_kx_k\, \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

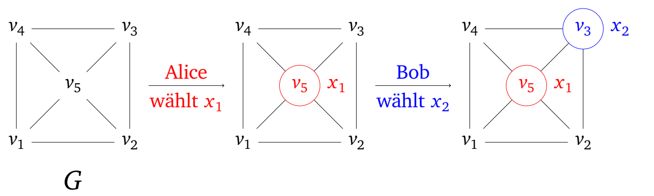
wahr ist. $Q_1, \dots, Q_k$ sind dabei jeweils entweder $\exists$ oder $\forall$, und in der Formel φ kommen nur die Variablen $x_1, \dots, x_k$, $=$, E, $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ vor (also *kein* $\forall$ und *kein* $\exists$).

Das Spiel läuft in k Runden. In der i-ten Runde darf sich, falls $Q_i = \exists$ gilt, Alice einen Knoten für x_i aussuchen. Falls $Q_i = \forall$ gilt darf dagegen Bob einen Knoten für x_i aussuchen. Alice gewinnt, wenn nach der k-ten Runde die ausgesuchten Knoten die Formel φ erfüllen.

Beispiel: Wir betrachten die Formel

$$\exists x_1\, \forall x_2\, (Ex_1x_2 \vee x_1 = x_2)$$

und den Graphen G (siehe unten). Da die Formel mit $\exists$ beginnt, darf zunächst Alice einen Knoten für x_1 aussuchen, etwa Knoten v_5. In der zweiten Runde darf dann Bob einen Knoten für x_2 aussuchen, etwa v_3. Da eine Kante zwischen v_5 und v_3 existiert, ist die Formel Ex_1x_2 und damit auch $Ex_1x_2 \vee x_1 = x_2$ erfüllt, Alice gewinnt also.



Ein einzelner Spielverlauf ist dabei wenig aussagekräftig (der unterlegene Spieler könnte ja einfach schlecht gespielt haben). Man kann jedoch zeigen:

> Wenn $Q_1x_1\, Q_2x_2 \dots Q_kx_k\varphi(x_1, \dots, x_k)$ in dem betrachteten Graphen gilt, und nur dann, kann Alice auf jeden Fall gewinnen (sie hat eine *Gewinnstrategie*).

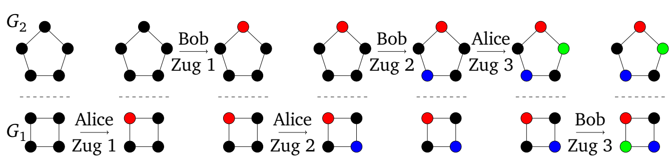
Vergleichsspiele (Back & Forth)

Auch beim Vergleichsspiel tritt Alice (Spielerin I, „Unterscheiderin") gegen Bob (Spieler II, „Nachahmer") an. Diesmal versucht Alice, Bob davon zu überzeugen, dass zwei gegebene Graphen G_1 und G_2 verschieden sind.

In der ersten Runde sucht sich Alice einen der beiden Graphen aus und markiert einen Knoten in ihm mit der Variablen x_1. Bob muss dann einen Knoten *des anderen Graphen* ebenfalls mit x_1 markieren. In jeder weiteren Runde darf sich Alice erneut einen der beiden Graphen aussuchen und dort wieder einen Knoten mit der nächsten Variablen x_i belegen, und Bob muss im jeweils anderen Graphen antworten. Dabei dürfen Knoten auch mit mehreren Variablen markiert werden.

Nach k Runden hat Alice gewonnen, wenn alle Formeln der Form $x_i = x_j$ und Ex_ix_j $(1 \le i, j \le k)$ entweder in beiden Graphen oder in keinem der beiden gelten. Anderenfalls gewinnt Bob.

Beispiel:



Nach drei Runden hat Alice dieses Spiel gewonnen, da es in G_1 eine Kante zwischen dem blauen (x_2) und dem grünen (x_3) Knoten gibt, in G_2 jedoch nicht. Für seinen letzten Zug hätte Bob auch keine Möglichkeit mehr gehabt, in G_1 einen Knoten zu wählen, der weder bereits rot noch bereits blau ist und nicht mit dem blauen Knoten verbunden ist.

Auch hier geht es nicht um einen konkreten Spielverlauf, sondern um die Frage, ob Alice oder Bob eine Gewinnstrategie hat. Man kann zeigen:

> Wenn es eine Aussage der Form $Q_1x_2 \dots Q_kx_k\,\varphi$ gibt, die in G_1 aber nicht in G_2 gilt, dann hat Alice eine Gewinnstrategie im k-Runden Vergleichsspiel. (Dabei darf φ wieder weder $\exists$ noch $\forall$ enthalten.)
>
> Umgekehrt kann man aus einer Gewinnstrategie für Alice eine Formel konstruieren, die nur in einem der beiden Graphen gilt.

Hilberts Hotel –

Belegt und doch unendlich viel Platz

Lange Nacht der Mathematik 2025

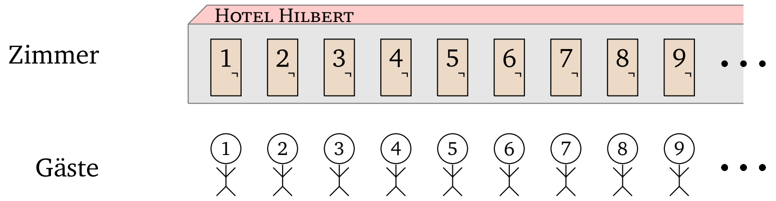
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Hilberts Hotel

In Hilberts Hotel gibt es *abzählbar* unendliche viele Zimmer mit Nummern $1, 2, 3, 4, \ldots$.

Alle Zimmer sind belegt, aber neue Gäste kommen.

In Zimmer i wohnt Gast i.



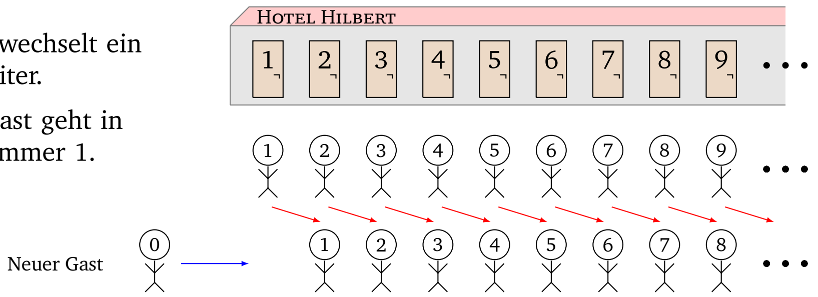
1. Ein neuer Gast

Ein neuer Gast 0 kommt an. Die vorhandenen Gäste wechseln das Zimmer. Gast i wechselt in das Zimmer $i + 1$. Zimmer 1 ist jetzt frei und Gast 0 zieht dort ein.

Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie positive natürliche Zahlen.

Die Gäste $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ können in den Zimmern $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ untergebracht werden.

1. Jeder Gast wechselt ein Zimmer weiter.
2. Der neue Gast geht in das freie Zimmer 1.



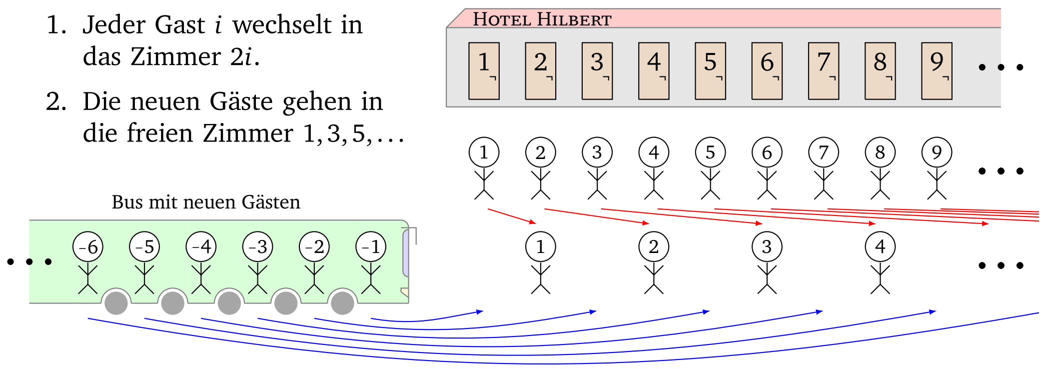
2. Ein Bus voller unendlich vieler neuer Gäste

Ein Bus mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen -1, -2, -3, -4, ... kommt an. Die bisherigen Gäste ziehen um: Gast i wechselt in das Zimmer $2i$. In die freien Zimmer $1, 3, 5, 7, \ldots$ ziehen die neuen Gäste ein. Gast $-j$ geht in Zimmer $2j - 1$.

Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie ganze Zahlen.

Die Gäste $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ können in den Zimmern untergebracht werden. (Die 0 wird wie in Fall 1 noch hinzugefügt.)

1. Jeder Gast i wechselt in das Zimmer $2i$.
2. Die neuen Gäste gehen in die freien Zimmer $1, 3, 5, \ldots$



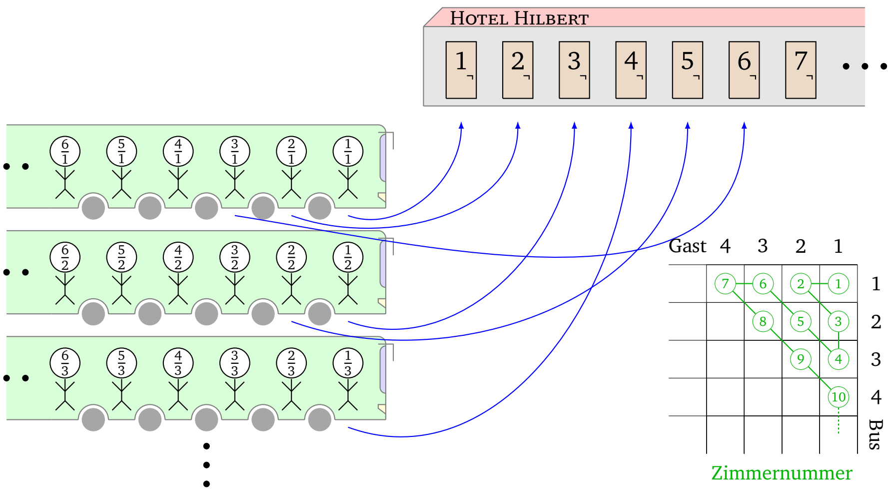
3. Unendlich viele Busse voller unendlich vieler neuer Gäste

Es kommen abzählbar unendliche viele Busse $b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$ mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen an. Im Bus b_i sitzen die Gäste $\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \frac{4}{i}, \ldots$.

Die bestehenden Gäste werden in einen weiteren Bus b_1 mit den Gästen $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots$ ausquartiert. Die neuen Zimmer werden nach dem Muster rechts zugewiesen. Jeder Gast bekommt ein Zimmer.

Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie rationale Zahlen.

Nun können auch alle negativen Brüche wie in Fall 2 untergebracht werden. Also haben wir jeden Bruch $\frac{p}{q}$ untergebracht. Insbesondere kann auch $\mathbb{Q}$ untergebracht werden.



im Netz

Lange Nacht der Mathematik

dieses Handout

Beweise

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mathematik als sichere Wissenschaft

Eines der Alleinstellungsmerkmale der Mathematik unter den Wissenschaften ist die Forderung nach strengen Beweisen. Anders als die meisten anderen Wissenschaften gewinnt die Mathematik ihre Erkenntnisse nicht grundlegend aus empirischen Beobachtungen, sondern aus theoretischen Ableitungen. So ist es der Mathematik möglich, zu sicherem Wissen zu kommen. Erst in der Motivation von neuen mathematischen Forschungsobjekten und Fragestellungen sowie in der Modellbildung zu Anwendungszwecken spielen empirische Methoden wieder eine Rolle.

Beweise in der Mathematik

Um zu neuer Erkenntnis zu gelangen, setzt die Mathematik auf Beweise. Ein mathematischer Beweis ist dabei eine Argumentationskette, die aus gewissen Annahmen die Behauptung herleitet. Dabei genügt es nicht, die Behauptung nur plausibel zu machen, oder sie mit genug Daten und Beispielen zu unterfüttern: Der Anspruch an einen mathematischen Beweis ist eine hieb- und stichfeste Begründung, die zumindest prinzipiell, nach genug Überlegung, nicht anzweifelbar ist.

Die Wurzel aus 2 ist irrational

Als Beispiel wollen wir zeigen, dass die Wurzel aus 2 irrational ist, sich also nicht als Bruch $\frac{a}{b}$ zweier natürlicher Zahlen a und b schreiben lässt. Dieser Beweis wird i.d.R. Euklid (ca. 300 v. Chr.) zugeschrieben, war aber schon vorher bekannt. Der Beweis folgt der Idee eines Widerspruchsbeweises. Wir nehmen also an, dass es natürliche Zahlen a und b gibt, die $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ erfüllen, und führen dies zu einem Widerspruch.

Sei also $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wenn a und b einen gemeinsamen Teiler außer 1 haben, so können wir den Bruch mit dem Teiler kürzen. Wir können also davon ausgehen, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler haben. Quadrieren wir die Gleichung $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, so erhalten wir $2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $a^2 = 2b^2$. Also ist a^2 und damit auch a gerade. Es gibt also eine natürliche Zahl c mit $a = 2c$. Dann ist $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$, also $b^2 = 2c^2$. Also ist auch b^2 und damit b gerade. Damit wäre aber 2 ein gemeinsamer Teiler von a und b, was unserer Annahme widerspricht.

Darstellung Euklids, Ausschnitt aus Raffaels *La scuola di Atene*, 1510

Um sicherzugehen, dass wir keine Argumentationslücken übersehen haben, können wir überprüfen, wo wir die verschiedenen Annahmen im Beweis benutzt haben.

- Wo im Beweis haben wir benutzt, dass a und b natürliche Zahlen sind?
- Wo im Beweis haben wir benutzt, dass wir $\sqrt{2}$ untersuchen? Welcher Beweisschritt bricht etwa für $\sqrt{4} = 2$?

Eine erfolgreich bewiesene mathematische Aussage lädt auch immer dazu ein, nach Verallgemeinerungen zu fragen:

- Für welche anderen natürlichen Zahlen n ist $\sqrt{n}$ irrational?
- Was ist mit höheren Wurzeln, etwa $\sqrt[3]{2}$?

Versuch dich doch mal daran!

Beweiskalküle

Während der theoretische Anspruch an mathematische Beweise hoch ist, ist es im Alltag meist unpraktikabel Beweise in der Formalität aufzuschreiben. Daher wählt man einen Kompromiss zwischen Rigorosität und Praktikabilität und begnügt sich damit, den Beweis so formal aufzuschreiben, dass man ihn, sollten noch Zweifel bestehen, jederzeit formalisieren könnte.

Will man jedoch ganz sicher gehen, gibt es Formalismen, um Beweise so genau aufzuschreiben, dass sie selbst mit einem Computer überprüft werden können. Solche Formalismen sind *Beweiskalküle*. Diese erlauben nur wenige Axiome als Grundannahmen, die nicht weiter bewiesen werden müssen, und erlauben dann durch sogenannte *Schlussregeln* weitere Aussagen daraus herzuleiten.

Ein Beweis im Kalkül ist eine Folge von Aussagen, wobei jede Aussage entweder ein Axiom ist, oder durch Anwendung einer Schlussregel aus vorherigen Aussagen folgt. Um einen solchen Beweis auf Korrektheit zu prüfen, muss man den Beweis nicht verstehen; es genügt stumpf zu überprüfen, ob jede neue Aussage entweder ein Axiom ist, oder durch eine Anwendung einer Schlussregel aus vorherigen Aussagen folgt. Dies kann also selbst ein Computer erledigen!

Hilbert-Kalküle sind Beweiskalküle, die mit besonders wenigen Schlussregeln auskommen. Sie gehen auf Gottlob Frege (1848 – 1925) und David Hilbert (1862 – 1943) zurück. Als Beispiel betrachten wir einen Hilbertkalkül für die Aussagenlogik, mithilfe dessen sich allgemeingültige Aussagen über boolesche Variablen, d.h. Variablen, die nur die Werte ‚wahr' und ‚falsch' annehmen können, beweisen lassen.

David Hilbert, Fotografie, 1912

Gottlob Frege, Fotografie, 1878/79

Unser Kalkül benutzt drei Axiome, das heißt Grundannahmen, die nicht weiter bewiesen werden müssen. Für diese muss man also „von Hand" überprüfen, dass sie mit unseren Intuitionen zur Aussagenlogik übereinstimmen.

1. Axiom $A \to (B \to A)$

2. Axiom $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3. Axiom $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Hierbei sind A, B und C beliebige Aussagen, $A \to B$ steht für die Aussage ‚A *impliziert* B' und $\neg A$ steht für die Aussage ‚*nicht* A'.

Als einzige Schlussregel benötigt unser Beweiskalkül die Regel *Modus ponens*:

Modus ponens: Aus den Aussagen A und $A \to B$ folgt die Aussage B.

Überraschenderweise stellt sich heraus, dass schon ein so einfacher Kalkül ausreicht, um alle allgemeingültigen Aussagen der Aussagenlogik zu beweisen. Es ist jedoch nicht immer einfach, einen solchen Beweis auch zu finden. Wie lässt sich etwa im obigen Kalkül die allgemeingültige Aussage $A \to A$ beweisen?

Muddy Children

Wer weiß wann was?
Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Stell Dir vor…

…eine Gruppe von Kindern hat draußen gespielt und nun haben einige von ihnen Matsch auf der Stirn;

jedes Kind sieht genau, welche anderen Kinder Matsch auf der Stirn haben, keines weiß es von sich selbst.

Mindestens ein Kind hat Matsch auf der Stirn.

Aber alles perfekte Logiker natürlich …

Aussagen, Fragen und Fragen und … und Antworten?

Beobachter zu allen: Da hat ja jemand Matsch auf der Stirn.

Beobachter fragt alle zuammen: Wer von Euch weiß über Matsch auf der eigenen Stirn bescheid? — **Niemand meldet sich**

Beobachter fragt alle zuammen: Wer von Euch weiß über Matsch auf der eigenen Stirn bescheid? — **Niemand meldet sich**

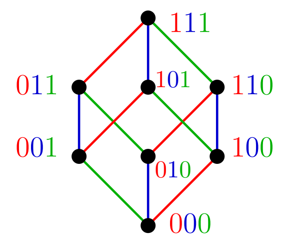
Beobachter fragt alle zuammen: Wer von Euch weiß über Matsch auf der eigenen Stirn bescheid? — **Niemand meldet sich**

Was folgt daraus, und wie geht das weiter?

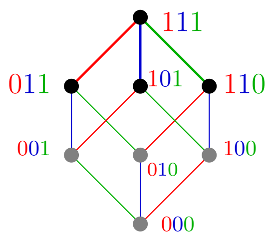
Modellierung möglicher Zustände

- Bei n Kindern (Kind 1, …, Kind n) kann man die möglichen Zustände als Bit-Folgen $(b_1, \ldots, b_n)$ der Länge n erfassen: der Eintrag b_i in Position i beschreibt ob Kind i Matsch auf der Stirn hat ($b_i = 1$) oder nicht ($b_i = 0$).
- Vorab sind alle 2^n Möglichkeiten in Betracht zu ziehen (für $n = 3$ Kinder wären das $2^3 = 8$ Möglichkeiten, die man sich als die Ecken eines 3-dim. Würfels vorstellen kann, allg. ein n-dimensionaler Hyperkubus); nach der ersten Ansage wissen alle, dass der tatsächliche Zustand nicht $(0, \ldots, 0)$ sein kann.
- Jedes Kind sieht alle anderen, ist also vorab genau über den eigenen Zustand im Unklaren. Aus der Perspektive von Kind i ist also alles klar bis auf b_i. Diese Unsicherheit spiegelt sich in den Kanten des Hyperkubus: Die Kanten in der i-ten Dimension verbinden diejenigen möglichen Zustände, die für Kind i zu Beginn ununterscheidbar sind.
- Sobald ein Kind aufgrund der (allen) verfügbaren Information eine der jeweils zwei Möglichkeiten, die mit der eigenen Beobachtung verträglich sind, ausschließen kann, weiß es also über den eigenen Zustand Bescheid – und meldet sich auf die Frage.
- Die restliche Analyse ergibt sich systematisch anhand dieser Fragen:
  In welcher Fragerunde werden die ersten Kinder bescheidwissen?
  Welche Kinder wissen in dieser Runde Bescheid?
  Was können die restlichen aus deren Antworten schließen?

Beispiel mit drei Kindern



Nach der ersten Frage



Hintergrund und weitere Aspekte

Wissensrepräsentation und das logische Schließen in Bezug auf verteilte Information spielt in vielen Bereichen eine große Rolle: Analyse von Spielstrategien, Protokolle für die Übermittlung verschlüsselter Nachrichten, …

Ein Zweig der mathematischen Logik, der sich mit Aussagen über (Aussagen über) verteilte Information befasst, ist die *Modallogik*.

Informations-Netzwerke geben Anlass zur Untersuchung von *verteilter Information* und Konzepten wie *common knowledge* oder *public announcement*.

Die Kodierung von (Informations-)Zuständen durch Bitfolgen in hoch-dimensionalen Räumen spielt in vielen Bereichen der Informationsverarbeitung eine Rolle; wenn direkte Kanten Paare von Knoten verbinden, die sich hinsichtlich eines Informations-Eintrags unterscheiden, liefert der *Hamming-Abstand* ein natürliches Maß der Informationsdifferenz;
wichtig ist der zum Bsp. auch für Verfahren zur Fehlererkennung oder -korrektur in der Datenübertragung (*error detecting/error correcting codes*).

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Logik

Lange Nacht der Mathematik

dieses Handout

Selbstbezüglichkeit und logische Paradoxa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lügner-Paradoxon

Dieser Satz ist falsch.

Barbier-Paradoxon

Der Barbier rasiert alle,
die sich nicht selbst rasieren.

Bibliotheks-Paradoxon

Der Bibliothekskatalog für diejenigen Bücher, die sich nicht selbst aufführen

Gödels Unvollständigkeitssätze

Was ist mit Sätzen, die ihre eigene Nicht-Beweisbarkeit konstatieren?

Hintergrund und weitere Aspekte

Als *Antinomie vom Lügner* wird eine Variante obiger Beispiele dem griechischen Philosoph Epimenides (vmtl. 5./7.Jh.v.Chr.) zugeschrieben.

Verwandte Ideen sind mathematisch als *Diagonalisierungsargumente* nützlich: durch Selbstbezüglichkeit (i.S. einer „negativen Rückkopplung") lässt sich die Existenz bestimmter Objekte logisch ausschließen.

Während Existenzbeweise im Prinzip durch Angabe von Beispielen oder Konstruktionsbeschreibungen gegeben werden können, verlangen *Nichtexistenz-* oder *Unmöglichkeitsbeweise* andere Ideen und benutzen oft indirekte Schlüsse!

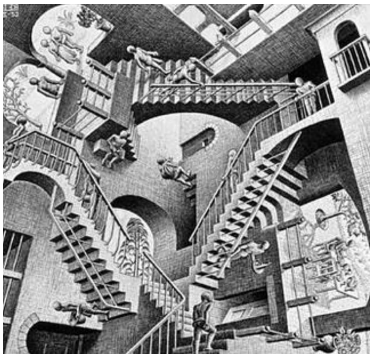
Klassische Diagonalisierungsargumente, die im Kern den obigen Beispielen ähnlich sind, belegen u.a. dass

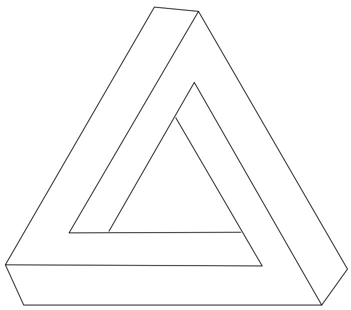
- die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist (Cantor)
- nicht alle zahlentheoretischen Funktionen algorithmisch berechenbar sein können (Church–Turing)
- nicht alle wahren mathematischen Aussagen in axiomatischen Systemen formal beweisbar sein können (Gödel)

Alan Turing (1912-1954)

Kurt Gödel (1906-1978)

M.C. Escher: *Relativity* (1953)





weiterführende Links

Alan Turing (Wikipedia)

Das Halteproblem für Turingmaschinen, nach Alan Turing

Kurt Gödel (Wikipedia)

Gödelsche Unvollständigkeits-Sätze, nach Kurt Gödel

Gödel, Escher, Bach (Wikipedia)

Eine sehr populäre Darstellung zu verwandten Ideen findet sich in dem bekannten Buch von *Gödel, Escher, Bach* (1979) von Douglas Hofstaedter

Lange Nacht im Netz

dieses Handout

Lange Nacht der Mathematik

Das Doppelpendel: Simulation von Chaos

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mathematisches Chaos – Berechenbar und trotzdem nicht vorherzusagen

In der Umgangssprache bedeutet „Chaos“ Unordnung oder Regellosigkeit. In der Mathematik untersucht die Chaostheorie, wie manche Systeme mit deterministischen Regeln scheinbar zufälliges oder eben „chaotisches“ Verhalten zeigen: Wir können zwar genau berechnen, wie sich ein bestimmter Zustand in der Zukunft entwickeln wird. Jedoch kann die kleinste Abweichung von diesem Startzustand zu Veränderungen führen, die nicht vorherzusagen sind, ohne alle Berechnungen nochmals durchzuführen. Der Mathematiker und Meteorologe Edward Lorenz, einer der Begründer der Chaostheorie, drückte das so aus:

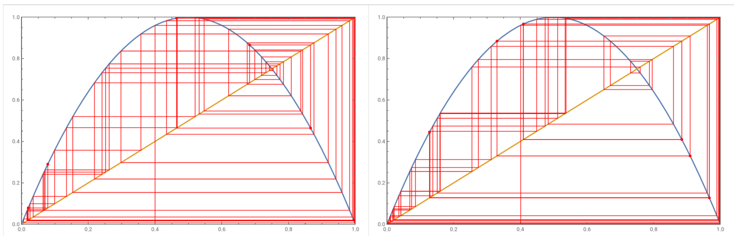
“Chaos: When the present determines the future but the approximate present does not approximately determine the future.”

Die logistische Abbildung

Ein Beispiel für chaotisches Verhalten ist die simpel anmutende logistische Abbildung

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n).$$

In den Spinnwebdiagrammen sind 50 Iterationen dieser Abbildung visualisiert. Ein kleiner Unterschied im Startwert führt zu substantiell unterschiedlichen Bildern. Bei noch mehr Iterationen wären die Diagramme bald mit roten Linien ausgefüllt, denn von fast allen Startwerten im Intervall $[0,1]$ kommt man jedem anderen Wert darin irgendwann beliebig nahe. Auch das ist eine Eigenschaft chaotischer Systeme.



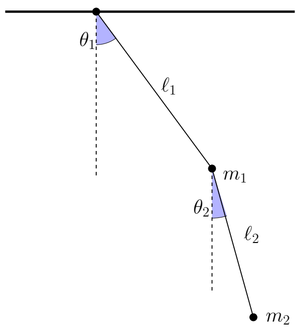
$x_0 = 0.4$ $\qquad$ $x_0 = 0.401$

Das Doppelpendel - ein Experiment im Chaos

Das physikalische Doppelpendel besteht aus einem starren Stab, an dessen Schwerpunkt ein weiterer Stab aufgehängt ist. Zusammen können sie sich in einer Ebene parallel zur Wirkung der Gravitation schwingend bewegen. Wir können dieses System als zwei masselose Stäbe mit Punktmassen an ihren Enden idealisieren (und vernachlässigen dabei auch die Reibung).
Sind Längen, Massen und die Erdbeschleunigung gegeben, dann wird das System durch die Winkel θ_1, θ_2 und ihre zeitliche Veränderung vollständig beschrieben. Wir geben die resultierenden Bewegungsgleichungen hier für jeweils identische Massen und Längen sowie für geeignet gewählte Zeiteinheiten an:

$$\begin{pmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2-\cos^2(\theta_2-\theta_1)}\begin{pmatrix}1 & -\cos(\theta_2-\theta_1)\\ -\cos(\theta_2-\theta_1) & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\sin\theta_1+\dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\\ -\sin\theta_2-\dot\theta_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)\end{pmatrix}$$

Selbst mit den vereinfachenden Annahmen, die wir getroffen haben, können wir keine exakte Lösung dieser Gleichungen bestimmen. Stattdessen wird das System in unserer Simulation numerisch gelöst. Je nach dem, wie man die Anfangsbedingungen wählt, zeigt sich dabei unterschiedliches Verhalten:
Startet man mit geringer Energie (kleine Winkel und Winkelgeschwindigkeiten), dann ergibt sich eine gleichmäßige, periodische Pendelbewegung. Bei großer Energie (große Winkelgeschwindigkeiten) überschlagen sich die Pendel; ebenfalls in einer periodischen Bewegung.
Dazwischen ist die Bewegung chaotisch: Es gibt kein sich periodisch wiederholendes Verhalten. Stattdessen nehmen die Pendel (lässt man ihnen genügend Zeit) alle mit ihrer Energie möglichen Positionen und Geschwindigkeiten an, und kleine Veränderungen der Startposition führen zu völlig verschiedenen Trajektorien!



Modellierung des Doppelpendels

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Statt ein Anfangswertproblem (bei dem die Funktion u gesucht wird)

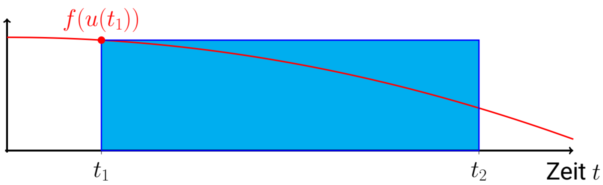
$$\dot u(t) = f(u(t))$$

direkt zu lösen, integriert man die Gleichung zunächst und erhält

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(u(s))\, ds.$$

Wir wollen das Integral näherungsweise berechnen. Hier sind verschiedene Methoden bekannt, z.B. kann es mithilfe eines Rechtecks approximiert werden:

$$u(t_2) \approx u(t_1) + (t_2 - t_1)\cdot f(u(t_1)).$$



So können nacheinander Approximationen von $u(t_1),\ u(t_2),\ u(t_3),\ \ldots$ bestimmt werden. Dieses Verfahren wird *Eulersches Polygonzugverfahren* genannt und ist seit 1768 bekannt. Moderne Verfahren sind viel komplizierter, um die Genauigkeit zu verbessern und Probleme wie wachsende Energie zu vermeiden.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Numerik und Wissenschaftliches Rechnen

C.M. Danforth. “Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall” Mathematics of Planet Earth (2013)
M. Kiehl. “Einführung in die Mathematische Modellierung” Skript, TU Darmstadt (2021)
A. Ohlhoff, P. H. Richter. “Forces in the Double Pendulum” Z. angew. Math. Mech. (2006)
K. Reiss. “Cobweb Diagram of the Logistic Map” Wolfram Demonstrations Project (2021)

Simulation zu diesem Modell: `Nocheinzufügen?`

Die lange Nacht der Mathematik

Poster Räuber & Beute

Demonstration der log. Abb.

Gemeinsam schnell: Gleichungssysteme lösen mit dem Jacobi-Verfahren

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Landvermessung von Gauß

Als Carl Friedrich Gauß 1820 vom König Hannovers mit der Landesvermessung beauftragt wurde, hatte er einige Herausforderungen zu bewältigen.

Zur Bestimmung des Flächeninhalts unterteilte er das Königreich in Dreiecke, deren Flächeninhalte er addierte (siehe Abb. 1). Um die Auswirkungen von Messfehlern zu verringern, erhob er mehr Datenpunkte als nötig und führte eine Ausgleichsrechnung durch. Dabei traten sehr große lineare Gleichungssysteme auf, die er kaum mit dem Eliminationsverfahren lösen konnte.

- Die Rechenschritte des Eliminationsverfahrens lassen sich nicht verteilen und unabhängig ausführen.
- Rechenfehler machten das Ergebnis hinfällig.

Dabei genügte ihm eine hinreichend genaue Näherungslösung.

Abstrakt gesehen brauchte Gauß ein Verfahren, das näherungsweise die Lösung x_1, x_2, ..., x_n eines linearen Gleichungssystems (LGS) mit n Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \dots + a_{1,n}\,x_n &= b_1\,, && (1)\\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \dots + a_{2,n}\,x_n &= b_2\,, && (2)\\ &\vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \dots + a_{n,n}\,x_n &= b_n && (n) \end{aligned}$$

bestimmt. Dabei war n sehr groß und abhängig von der Anzahl der Messpunkte.

Ein Beispiel für die Durchführung

Gesucht sind x_1, x_2 und x_3 derart, dass

$$\begin{aligned} 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 1\,,\\ 1x_1 - 4x_2 + 1x_3 &= 4\,,\\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

Die Rechnungen werden an die Personen A,B und C verteilt. Siehe Abbildung 2 für den zeitlichen Verlauf.

Das Jacobi-Verfahren

Als Ausweg verwendete Gauß das Jacobi-Verfahren: Ein Iterationsverfahren. Anstatt der exakten Lösung werden Näherungslösungen berechnet, die schrittweise verbessert werden. Außerdem teilte Gauß die Rechnungen unter seinen Studierenden auf.

Insgesamt ging Gauß wie folgt vor:

1. Jeder Studierende bekam genau *eine* Gleichung und *eine* Variable zugewiesen. Sie stellten ihre Gleichung nach ihrer Variable um.
2. Die erste Näherungslösung stand an der Tafel.
3. Die Studierenden führten nun gleichzeitig und unabhängig voneinander die folgenden Schritte aus:
   a) Sie schrieben die aktuellen Variablenwerte von der Tafel ab.
   b) Sie setzten die Variablenwerte in ihre umgestellte Gleichung ein und erhielten eine neue Näherung ihrer Variable.
   c) Sie ersetzten den Wert ihrer Variable an der Tafel mit der neuen Näherung.

Funktioniert das für jedes LGS?

Kurze Antwort: Nein. Es funktioniert beispielsweise für *strikt diagonal dominante* lineare Gleichungssysteme. Das sind Systeme, für die in jeder Zeile der Betrag des Diagonaleintrags $a_{i,i}$ größer ist, als die Summe der Beträge der restlichen Einträge.

Was passiert bei Rechenfehlern?

Das ist nicht schlimm. Das Jacobi-Verfahren ist als Iterationsverfahren unempfindlich gegenüber Rechenfehlern. Spätere Iterationsschritte gleichen diese wieder aus. Dies trifft auf das Eliminationsverfahren nicht zu.

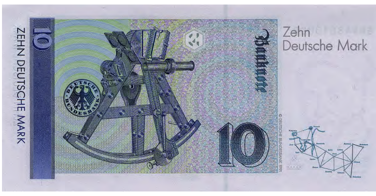


Abb. 1: Zehnmarkschein mit der Aufteilung des Königreichs Hannover in Dreiecke durch Gauß.

Jacobi-Verfahren heute

Damals wie heute werden Iterationsverfahren aus ähnlichen Gründen verwendet, um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Diese treten unter anderem in der angewandten Statistik oder bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen auf. In diesen Fällen sind mehr als 10^6 Gleichungen keine Seltenheit.

Heute rechnen keine Studierenden mehr, sondern Computer. Das Verfahren wird vom Smartphone bis zum Hochleistungsrechner eingesetzt und die Rechnungen werden über Prozessorkerne, Prozessoren oder sogar Rechner verteilt. Dabei werden nicht nur die Rechnungen parallelisiert, sondern auch die benötigten Daten verteilt. Das Jacobi-Verfahren ist dafür ein Musterbeispiel.

> "Ich empfehle Ihnen diesen Modus zur Nachahmung. Schwerlich werden Sie je wieder direct eliminiren, wenigstens nicht, wenn Sie mehr als zwei Unbekannte haben. Das indirecte Verfahren lässt sich halb im Schlafe ausführen, oder man kann während desselben an andere Dinge denken."

Zitat 1: Resümee von Gauß in einem Brief von 1823.

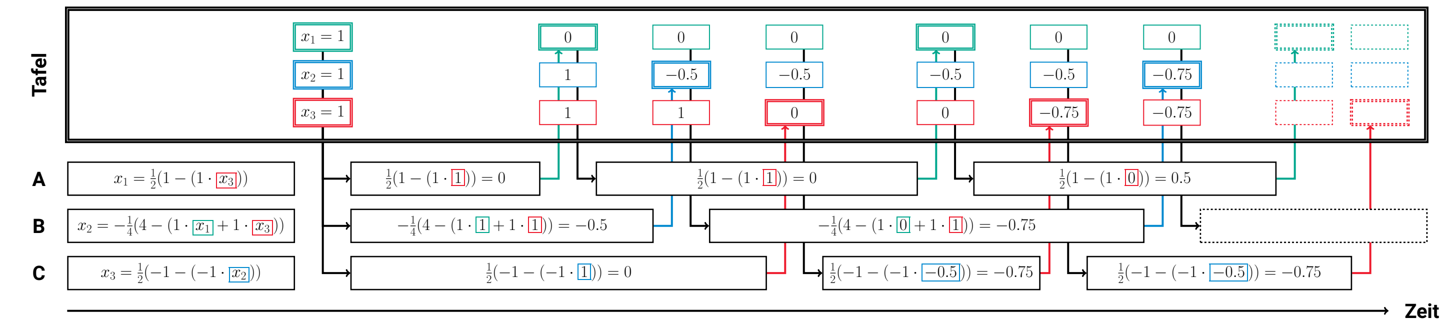


Abb. 2: Zeitlicher Verlauf der ersten Schritte des Jacobi-Verfahrens für das oben genannte Beispiel mit folgender Zuweisung: Person A bekommt Gleichung 1 und Variable x_1 zugewiesen, Person B Gleichung 2 und Variable x_2 und Person C Gleichung 3 und Variable x_3.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Numerik und Wissenschaftliches Rechnen

M. Hanke-Bourgeois. "Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens" (2009)

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Spion im Smartphone
Abhören ohne Mikrofon

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Töne messen ohne Mikrofon

In modernen Smartphones lässt sich das Mikrofon meist nicht unbemerkt aktivieren, um Ton mitzuschneiden. Allerdings ist ein Beschleunigungssensor verbaut, auf dessen Daten man einfacher zugreifen kann. Auch der Beschleunigungssensor kann zur Tonaufnahme genutzt werden. Erklingt ein Ton, so vibriert die Luft und bringt somit auch den Sensor zum schwingen. Diese Schwingung lässt sich mit dem Beschleunigungssensor messen.

Der Beschleunigungssensor eines Handys misst die Beschleunigung in alle drei Raumrichtungen. Mit der Beschleunigung kann mittels Integration die Amplitude der Schwingung ermittelt werden.

Unser Beschleunigungssensor kann maximal 400 Messungen pro Sekunde ausführen, wir haben also eine Abtastrate von $400\,\mathrm{Hz}$. Es können Töne bis maximal der Hälfte der Abtastrate gemessen werden. Das bedeutet, dass höhere Töne von dem Beschleunigungssensor nicht erfasst werden können.

Fourierreihen: Komplexe Schwingungen zerlegen

Mathematisch kann man Schwingungen vereinfacht durch einen Funktionsgraphen visualisieren, der um den Nullwert oszilliert. Das ist im Grunde genau das Bild, welches unser Beschleunigungssensor sieht! Das heißt: Zu jedem Zeitpunkt können wir durch den Sensor ermitteln, wie sehr das Handy nach oben oder unten ausgeschlagen hat. Nach einer kurzen Zeiteinheit kann die Messung so aussehen wie die schwarze Kurve in Abb. 1.

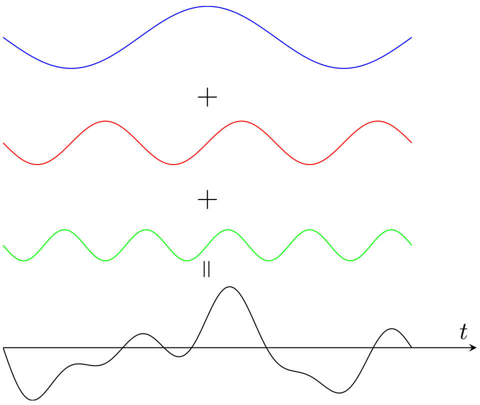


Abb. 1: Durch Vibration verursachte Auslenkung in Schwarz & Zerlegung in Elementarschwingungen (Rot, Blau, Grün)

Das Bild zeigt aber offensichtlich mehr als den eben beschriebenen Funktionsgraphen der Vibration. Wie in der Musik das Lied die Summe aller tönenden Instrumente ist, lassen sich in der Mathematik komplizierte Schwingungen (Abb. 1: schwarzer Graph) zerlegen in eine Summe von (möglicherweise unendlich vielen) Elementarschwingungen (Abb. 1: roter, grüner und blauer Graph). Dabei sagt einem der maximale Ausschlag (Amplitude) einer Elementarschwingung, wie stark sie in der Summe ins Gewicht fällt.

Was wir eben beschrieben haben, ist die sog. Fourierreihendarstellung einer periodischen Funktion f mit Periode T. Formal schreibt man

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t), \qquad (1)$$

wobei

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Grundfrequenz,
- $\cos(k\omega t), \sin(k\omega t)$ die Elementarschwingungen zur Frequenz $k\omega$,
- $2 \cdot a_0$ der Mittelwert der Funktion f und
- $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ die Amplituden der Elementarschwingungen

sind.

Amplituden aus Messdaten ermitteln

Tatsächlich sieht der Sensor nicht das kontinuierliche Bild des Funktionsgraphen, welches wir eben skizziert haben sondern nur eine Annäherung daran, denn: Sensorik funktioniert über Messungen und diese Messungen können nur zu endlich vielen Zeitpunkten durchgeführt werden! Für eine große natürliche Zahl N, nehmen wir an, dass es $2N$ Sensormessungen gibt. Das heißt zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_{2N}$ werden die Werte $f(t_1), f(t_2) \ldots, f(t_{2N})$ gemessen, siehe Abb. 2.

Falls f eine Funktion der Form (1) ist, möchten wir aus den Messdaten gerne die Amplituden $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ bestimmen. Mithilfe endlich vieler Daten unendlich viele Unbekannte zu bestimmen, ist jedoch unmöglich.

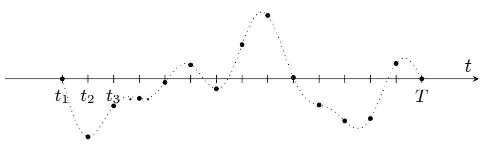


Abb. 2: Durch Vibration verursachte kontinuierliche Auslenkung (gepunktete Kurve) & durch den Sensor gemessene Auslenkungen (Messpunkte) zu den diskreten Zeiten $t_0, t_1, t_2, \ldots, T$

Wir behelfen uns mit einer weiteren Annahme: Dass hochfrequente Elementarschwingungen einen vernachlässigbaren Beitrag zur Fourierreihen-Darstellung (1) der kontinuierlichen Ausschlagsfunktion f leisten. Da hochfrequente Schwingungen für unsere Anwendung als eine Art Rauschen interpretiert werden können, ist diese Annahme gerechtfertigt.

Insgesamt führt uns das auf ein lineares Gleichungssystem mit $2N$ Gleichungen und $2N$ Unbekannten. Das definiert die sog. diskrete Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}
f(t_1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega t_1) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(k\omega t_1)\\
f(t_2) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega t_2) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(k\omega t_2)\\
&\vdots\\
f(t_{2N}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega t_{2N}) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(k\omega t_{2N}),
\end{aligned}$$

wobei $2 \cdot a_0 = \frac{1}{2N}(f(t_1) + \ldots + f(t_{2N}))$ dem Mittelwert von f entspricht.

Ein mathematisches Resultat sagt aus, dass man die Amplituden mittels

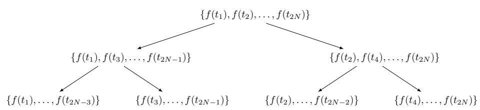
$$a_k = \sum_{n=1}^{2N} f(t_n) \sin(k\omega t_n) \qquad b_k = \sum_{n=1}^{2N} f(t_n) \cos(k\omega t_n)$$

für $k = 1, \ldots, N$ bestimmen kann.

Schnelle Fouriertransformation

Möchte man die Koeffizienten $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, b_{N-1}, a_N$ wie oben beschrieben berechnen, so muss man $(2N)^2$ Multiplikationen durchführen. Für einen Sensor mit Abtastrate $400\,\mathrm{Hz}$, wären das also $400^2 = 160.000$ Multiplikationen.

Mit der sog. schnellen Fouriertransformation (kurz: FFT) geht das deutlich schneller. Sei im Folgenden $2N$ eine Zweierpotenz. Für die FFT wird die Menge der Messpunkte in ungerade und gerade Punkte aufgeteilt



Man berechnet nun die schnelle Fouriertransformation der beiden Teilmengen. Dazu teilt man beide Teilmengen wieder in jeweils zwei Teilmengen auf. Dies macht man solange bis man nur noch ein Element pro Teilmenge hat. Um die Fouriertransformation einer größeren Menge zu erhalten, müssen die beiden kleineren Transformationen mit einem Vorfaktor addiert werden.

So müssen ungefähr $2N \log_2(2N)$ Multiplikationen durchgeführt werden, anstelle der $4N^2$ Multiplikationen, die wir für die naive Berechnung benötigen. Die FFT wird auch in der Funktechnik verwendet, wo große Datenmengen in Echtzeit zerlegt werden müssen (beispielsweise arbeitet 5G mit einer Frequenz von bis zu $43\,\mathrm{GHz}$).

Abtastrate	Naive Berechnung	FFT
$1\,\mathrm{KHz} = 10^3\,\mathrm{Hz}$	$\mathbf{10^{-6}s}$	$\mathbf{10^{-8}s}$
$1\,\mathrm{MHz} = 10^6\,\mathrm{Hz}$	$1s$	$\mathbf{2 \times 10^{-5}s}$
$1\,\mathrm{GHz} = 10^9\,\mathrm{Hz}$	$10^6 s$	$\mathbf{3 \times 10^{-2}s}$

Abb. 3: Vergleich der Rechenzeiten auf einem typischen Smartphone, in Fett: Echtzeitrechnung möglich

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Numerik und Wissenschaftliches Rechnen

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Das Rundreiseproblem

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Das Problem

Du bist Hobbypilot aus Darmstadt und planst eine Städtetour durch Deutschland. Um Flugbenzin zu sparen, suchst Du nach einer möglichst kurzen Tour, die alle Reiseziele besucht.

Mathematiker würden sagen, Du löst das *Rundreiseproblem* (*“Travelling Salesperson Problem“* (TSP)).

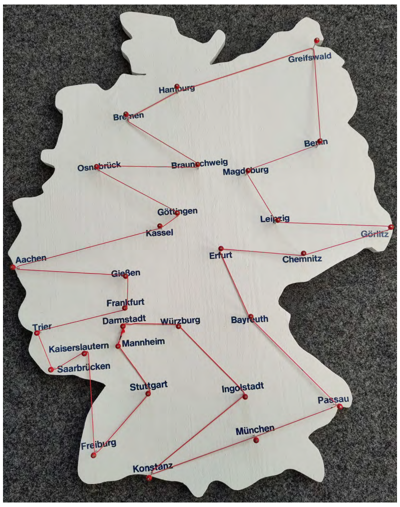
Deine Aufgabe

Aufgabe: Berühre alle markierten Städte einmal mit der Schnur und führe das Ende zurück nach Darmstadt.

Ziel: Verwende möglichst wenig Schnur.

Lösung: Die kürzeste Tour verraten wir natürlich nicht, aber die Länge der optimalen Lösung ist schwarz markiert.

Eine Beispiellösung - leider noch nicht optimal.



Motivation

Die Anzahl der verschiedenen Touren wächst rasant mit der Anzahl an Städten. Das macht es schwer, einen effizienten Algorithmus für das Problem anzugeben. Einen solchen zu finden, würde eines der **Millenium-Probleme** lösen (das sogenannte P-NP-Problem) und viel Ruhm, sowie eine Million US-Dollar Preisgeld einbringen.

Varianten

Wir haben es hier mit einem **euklidischen TSP** zu tun. Der Name kommt daher, dass wir die Städte als Punkte auf der euklidischen Ebene auffassen können und die **Luftlinie** genau den euklidischen Abstand beschreibt.

Würden wir statt der Luftlinie die **Straßenkilometer** betrachten, wären die Abstände nicht mehr euklidisch, und unser Problem ein sogenanntes **metrisches TSP**.

Wir könnten statt der Distanz auch die **Flugzeit** betrachten. Durch unterschiedliche Windverhältnisse wären Hin- und Rückweg zwischen zwei Städten nicht mehr gleich lang. Daher sprechen wir hier vom **asymmetrischen TSP**.

Näherungslösungen

Mathematiker versuchen, effiziente Algorithmen zu finden, die möglichst gute Touren berechnen. Es wird bewiesen, wie groß der (Approximations-)Faktor zwischen der Länge der kürzesten und der berechneten Tour höchstens wird.

Variante	Approximationsfaktor
euklidisch[a]	≈ 1
metrisch[b]	$\approx 1,5$
asymmetrisch[c]	≈ 22

[a] Sanjeev Arora (1996)
[b] Anna R. Karlin, Nathan Klein, and Shayan Oveis Gharan (2020)
[c] Vera Traub, and Jens Vygen (2019)

Heuristiken

Heuristiken sind Versuche, mit einer einfachen Idee gute Lösungen zu finden.

Die **Nearest-Neighbor-Heuristik** läuft immer von der aktuellen Stadt zur nächstgelegenen nicht-besuchten Stadt. Wie gut funktioniert diese Heuristik in unserem Beispiel? Probiere es aus!

Die **Nearest-Insertion-Heuristik** startet mit zwei Städten, die am nächsten beisammen liegen. Danach fügt sie immer die Stadt (möglichst geschickt) zur Tour hinzu, die am nächsten an einer der schon verbundenen Städte liegt. Im metrischen TSP finden wir auf diese Weise stets eine Tour, die höchstens doppelt so lang ist wie die kürzeste Tour.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Optimierung

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Windpark

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Aufgabe: Maximal viele Windräder in den Windpark

Auf einer gegebenen Fläche soll ein Windpark entstehen. Dabei haben wir das folgende Ziel:

Die vorhandene Fläche soll möglichst gut genutzt werden, um möglichst viel Energie aus Wind zu erzeugen. Aus Sicherheitsgründen muss zwischen je zwei Windrädern ein Mindestabstand herrschen. Ein Windrad ist bereits vorhanden und fix. Alle weiteren Windräder können dabei in der eingegrenzten Fläche platziert werden und müssen plan mit der Bodenscheibe darin liegen. Es dürfen sich keine Windräder überlappen, stapeln oder ähnliches.

Abstraktion der Aufgabe mit Un-/Gleichungen

Abstand: Der Abstand zwischen je zwei platzierten Windrädern muss größer sein als die Summe beider Sicherheitsradien (Bodenscheiben), vgl. (1).

Fixierung: Für das vorhandene Windrad sind die Koordinaten fixiert, d.h. $x_1 = (22.8, 22.4)$.

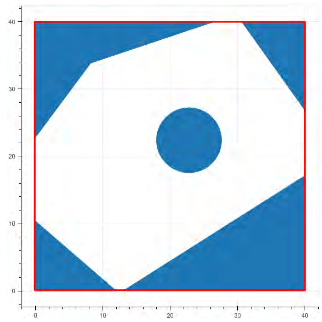
Verfügbares Gebiet: Wir können mit linearen Ungleichungen fordern, dass alle n Windräder (kurz: $\forall i$) im verfügbaren Bereich liegen, vgl. (2).

$$\|x_i - x_j\|_2 \geq r_i + r_j, \quad \forall i \neq j \qquad (1)$$
$$A_i x_i \leq b_i, \quad \forall i \qquad (2)$$

x_i : Koordinaten i-tes Windrad $x_i \in \mathbb{R}^2$

A_i, b_i : Matrix/Vektor für i-te Gebietsungleichungen $A_i \in \mathbb{R}^{9\times 2}, b_i \in \mathbb{R}^9$

r_i : Radius i-tes Windrad



Problem

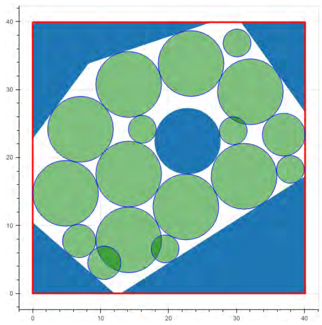
Es ist aufwendig überhaupt eine Anordnung mit vielen Windrädern zu finden, die alle Ungleichungen erfüllt (nicht zwingend maximal viele!).

Daher modifizieren wir das Problem, um zulässige Lösungen zu finden.

Lösungstechniken

Symmetrien: Für den Computer sind Vertauschungen gleicher Windräder neue Lösungen. Um den Suchraum zu verkleinern und den Prozess zu beschleunigen, verhindern wir diese Symmetrien mit der Vorgabe einer Ordnung, vgl. (3).

Penalty-Verfahren: Mit einem Penalty-Verfahren bestrafen wir das Nichterfüllen von Bedingung (1) durch Hinzufügen eines Strafterms in die Zielfunktion. Die Hilfsvariable $z_{ij} \in \mathbb{R}$ gibt die Überlappung zweier Windräder an. Diese Überlappung wird minimiert, vgl. (1.1) - (1.3).



Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llll}
\min\limits_{z,x} & \sum\limits_{i\neq j} z_{ij} & & (1.1)\\
\text{s.d.} & z_{ij} \geq r_i + r_j - \|x_i - x_j\|_2, & \forall i \neq j & (1.2)\\
& z_{ij} \geq 0, & \forall i \neq j & (1.3)\\
& A_i x_i \leq b_i, & \forall i & (2)\\
& x_i \leq x_{i+1}, & \forall i \in \{2, \dots, n-1\} & (3)
\end{array}$$

Bis auf die quadratische Nebenbedingung (1.2) liegt ein lineares Optimierungsproblem/Programm (kurz: LP) vor, wie es häufig in der Optimierung auftritt. Diese können in der Praxis meist effizient gelöst werden und daher werden Probleme häufig auf LPs reduziert.

Ergebnisse

Mit dieser Formulierung ist es nun möglich eine Lösung für das ursprüngliche Problem (1) - (2) mit bsw. SCIP[a] zu berechnen. Bei einem Zielfunktionswert von Null haben wir eine zulässige Lösung.

	Laufzeit
Original:	> 2 Tage
Modifiziert:	27 min 30 s

Das vorgestellte Problem ist ein "Circle Packing" Problem. Es scheint erst einfach, ist aber rechnerisch sehr fordernd.

Viele Optimierungsprobleme beinhalten ähnliche Packing Probleme als Teilprobleme und sind daher von großem Interesse in der Optimierung.

[a] SCIP Optimization Suite: https://www.scipopt.org/

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt,
AG Optimierung

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Handschrifterkennung mit KI

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Künstliche Intelligenz und Mathematik vereint

Künstliche Intelligenz (KI) ist dabei, unsere Welt nachhaltig zu verändern. Aber was steckt hinter ihrem Erfolg? Die Antwort liegt in der **Mathematik**, insbesondere in der **Optimierung**. Mithilfe der Mathematik können wir komplexe Probleme exakt formulieren. Die Optimierung sucht dann gezielt nach den besten Lösungen, indem sie die Parameter so anpasst, dass die Leistung von KI-Systemen maximiert wird.

Anwendung: Handschrifterkennung

Bei der Handschrifterkennung trainiert man ein neuronales Netz mit einem Datensatz $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, wobei x_i Bilder von handgeschriebenen Ziffern und y_i die zugehörigen korrekten Zahlen sind. Das Ziel ist, die Parameter θ des Netzes so anzupassen, dass die Vorhersage $f(x_i; \theta)$ möglichst genau dem echten Wert y_i entspricht. Nach dem Training soll das Netz auch für neue, zuvor unbekannte Eingabedaten gute Ergebnisse liefern, anstatt nur die gelernten Trainingsbeispiele „auswendig" zu kennen.

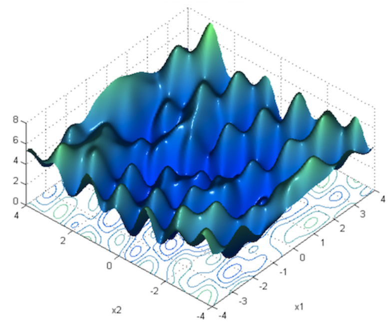
Challenges

- **Overfitting:** Das Netz passt sich stark an die Trainingsdaten an und performt schlecht auf neuen Daten.
- **Lokale Minima:** Die „Fehlerlandschaft", in der wir nach optimalen Parametern suchen, ist oft sehr komplex. Sie enthält viele lokale Minima, die es erschweren, die global beste Lösung zu finden.
- **Rechenaufwand:** Das Training großer Netze erfordert erhebliche Rechenleistung und Zeit.

Optimierungsverfahren

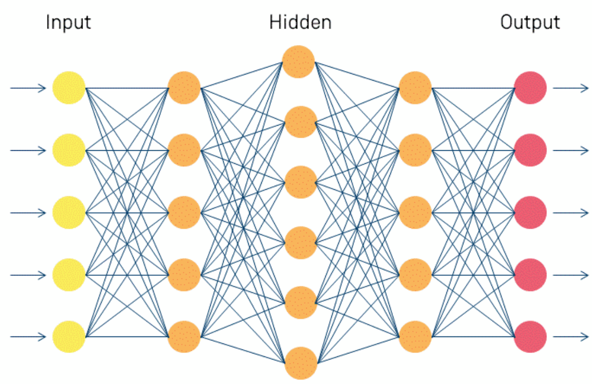
Ein neuronales Netz wird oft mit Hilfe von Gradientenverfahren trainiert. Dabei werden die Parameter θ Schritt für Schritt in Richtung des negativen Gradienten der Fehlerfunktion geändert. Wichtig ist dabei, dass wir das Modell $f(x_i; \theta)$ in die Zielfunktion einsetzen und anschließend **nach θ ableiten**, um die Richtung der schnellsten Abnahme zu bestimmen. Um bei sehr großen Datensätzen effizient zu sein, verwendet man häufig das **stochastische Gradientenverfahren (SGD)**.

Optimierung eines Neuronalen Netzes



Darstellung einer komplexen „Fehlerlandschaft", wo man versucht das globale minima zu finden.

Architektur eines Neuronalen Netzes



Eine typische Architektur: Eingangsschicht, verborgene Schichten (Hidden Layers) und Ausgabeschicht.

Mathematische Modellierung des Lernens

Das Training eines neuronalen Netzes kann als klassisches **Funktionsanpassungsproblem** (Regressionsproblem) formuliert werden:

$$\min_{\theta} L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(y_i, f(x_i; \theta)).$$

Hier misst $\ell(y_i, f(x_i; \theta))$, wie weit die Vorhersage vom wahren Wert entfernt ist. Unser Ziel ist es, die Parameter θ so zu wählen, dass der durchschnittliche Fehler $L(\theta)$ minimal wird. Ein Plot der Zielfunktion ist oben dargestellt.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Optimierung

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Efronsche Würfel

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Spielregel

Vor uns liegen vier ungewöhnliche Würfel. Wir spielen ein Spiel mit zwei Spielern. Spieler 1 ist die Besucherin bzw. der Besucher der Langen Nacht. Spieler 2 ist die Mathematikerin bzw. der Mathematiker am Stand.

Spieler 1 kann sich die Würfel anschauen. Danach wählt Spieler 1 einen der Würfel aus. Spieler 2 nimmt danach einen (der anderen) Würfel. Beide Personen würfeln gleichzeitig. Wer die höhere Augenzahl hat, gewinnt die Runde. Dabei gewinnt die Eule immer gegen alle anderen Zahlen. In der nächsten Runde kann Spieler 1 einen (ggf. neuen) Würfel auswählen, Spieler 2 nimmt danach einen (der anderen) Würfel.

Es gewinnt das Spiel, wer zuerst 10 Runden gewonnen hat. Die Besucherinnen und Besucher des Standes erhalten für die Teilnahme am Spiel einen Preis.

Bitte spiele zuerst das Spiel am Stand, bevor du das Poster weiterliest!

Die Würfel

Die beiden Spieler benutzen verschiedene Würfel, wenn sie gegeneinander antreten. Zur Auswahl stehen die folgenden vier Würfel:

- Würfel A: 3, 3, 3, 3, 3, 3
- Würfel B: 0, 0, 4, 4, 4, 4
- Würfel C: 1, 1, 1, 5, 5, 5
- Würfel D: 2, 2, 2, 2, Eule, Eule

Zum Nachdenken

Angenommen, Spieler 1 benutzt Würfel A und Spieler 2 benutzt Würfel B. Wie wahrscheinlich ist es, dass Spieler 1 die Runde gewinnt?

Wie ist es, wenn Spieler 1 Würfel B und Spieler 2 Würfel C wählt? ...

A vs. B

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel A gegen Würfel B gewinnt? Dazu muss Würfel B eine '0' zeigen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, denn in zwei (günstigen) Fällen von sechs (möglichen) Fällen zeigt Würfel B eine '0'. Also ist Würfel A schlechter als Würfel B.

B vs. C

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel B gegen Würfel C gewinnt? Dazu muss Würfel B eine '4' zeigen und Würfel C eine '1'. Es gibt hier insgesamt 36 mögliche Fälle für die Ausgänge. Günstig sind davon $4 \cdot 3 = 12$. Daher hat "B gewinnt gegen C" die Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Also ist Würfel B schlechter als Würfel C.

C vs. D

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel C gegen Würfel D gewinnt? Dazu muss Würfel C eine '5' zeigen und Würfel D eine '2', was in $3 \cdot 4 = 12$ Fällen vorkommt. Daher hat "C gewinnt gegen D" die Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Also ist Würfel C schlechter als Würfel D.

D vs. A

Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel D gegen Würfel A gewinnt? Dazu muss Würfel D die Eule zeigen. Dies ist in zwei von sechs Fällen so. Daher hat "D gewinnt gegen A" die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Also ist Würfel D schlechter als Würfel A.

Spielstrategie, Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler 2

Spieler 1 wählt zuerst den Würfel. Damit hat Spieler 2 die Möglichkeit, einen „besseren" Würfel auszuwählen. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnt Spieler 2 also in einer Runde.

Zum Nachdenken: Wie wahrscheinlich ist es, dass Spieler 2 zuerst 10 Runden gewonnen hat?

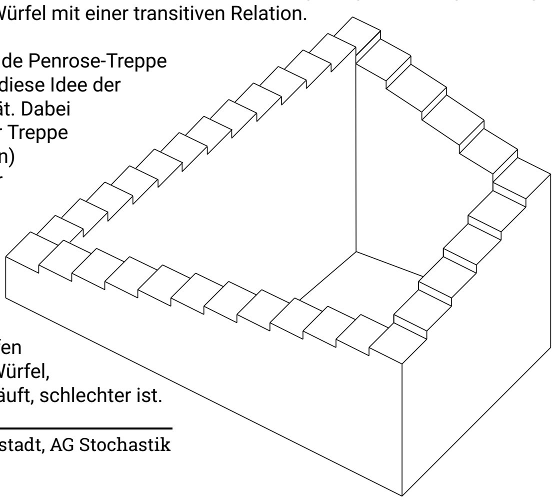
Tipp: Spieler 2 gewinnt genau dann das Spiel, wenn er/sie in Runde k zum 10. Mal gewinnt für ein $k \in \{10, 11, \ldots, 19\}$. Spieler 2 muss also die k. Runde gewinnen und vorher genau 9 aus $k-1$ Spielen.

Lösung zum Vergleichen: Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt ca. 94%.

Nicht-Transitivität

Daraus, dass Würfel A schlechter als Würfel B ist, Würfel B schlechter als Würfel C ist und Würfel C schlechter als Würfel D ist, folgt nicht, dass Würfel A der schlechteste ist. Denn wie oben gesehen wird Würfel D von Würfel A geschlagen. Man spricht von einer „nicht-transitiven" (oder „intransitiven") Relation zwischen den Würfeln. Bei einer „transitiven" Relation wären solche Schlussfolgerungen zulässig. Überlege dir ein Beispiel für Würfel mit einer transitiven Relation.

Die nebenstehende Penrose-Treppe veranschaulicht diese Idee der Nicht-Transitivität. Dabei geht man bei der Treppe (im Uhrzeigersinn) scheinbar immer bergab. Die Ecken der Treppe stehen für die vier Würfel. Nach-unten-Laufen heißt, dass der Würfel, auf den man zuläuft, schlechter ist.



Anwendungen

Die Analyse von intransitiven Relationen mit probabilistischen Komponenten kann in folgenden Gebieten nützlich sein:
- Entscheidungsfindung: Optionen z.B. in einer ökonomischen Entscheidung sind im Allgemeinen nicht linear geordnet.
- Psychologische Forschung: Menschliche Entscheidungen berücksichtigen eine Vielzahl rationaler und auch unbewusster (unvergleichbarer) Faktoren.
- Künstliche Intelligenz: Algorithmen, die mit nicht-linearen und schlecht vorhersagbaren Umgebungen umgehen müssen, werden mit Hilfe von wahrscheinlichkeitsbasierten Szenarien trainiert.
- Biologische und ökologische Modelle: Z.B. in komplexen Räuber-Beute-Modellen gibt es viele Abhängigkeiten.
- Analyse von Spielen: Entscheidungen in (z.B. Brett-)Spielen folgen ähnlichen Prinzipien wie im Bsp. der Efron-Würfel.

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik

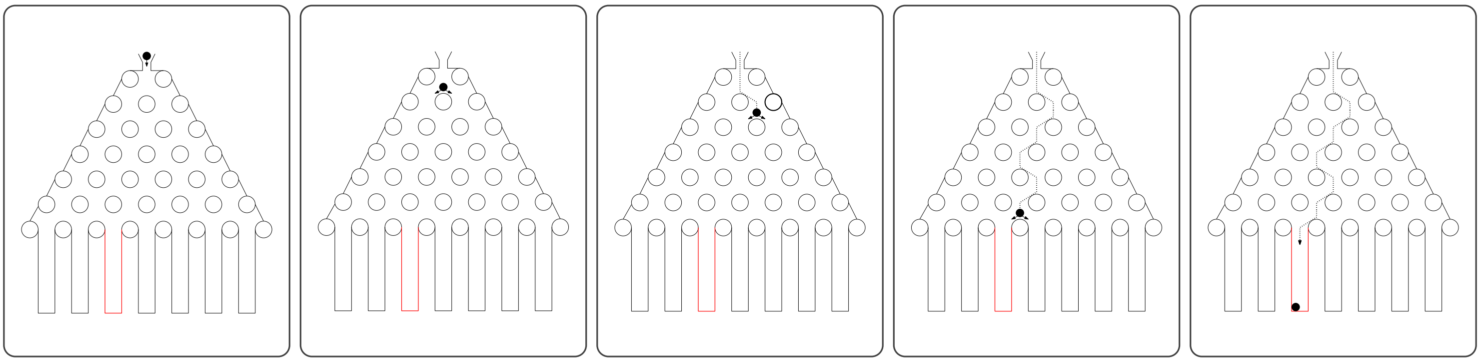
Galtonbrett

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beschreibung des Experiments

Ein Galtonbrett ist ein Gerät, mit dem man ein Zufallsexperiment durchführen kann. Es besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Hindernissen. Von oben wird eine Kugel in die Apparatur geworfen. Am ersten Hindernis springt die Kugel zufällig entweder nach links oder rechts und kommt dann auf die zweite Ebene, wo wieder ein Hindernis wartet. Am zweiten Hindernis kommt es wieder zur gleichen Zufallsentscheidung, etc. Nach dem Passieren aller Hindernisse werden die Kugeln in Fächern aufgefangen. Wir bezeichnen mit n die Anzahl der Hindernisebenen (im Bild unten ist $n = 6$). Es gibt am Ende des Bretts $n + 1$ Fächer (im Bild gibt es 7 Fächer).



Die Grundfrage

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Kugel in einem bestimmten Fach landet, z.B. dem roten?

Überlegung

Um in das erste Fach (das äußere linke, $k := 0$) zu kommen, muss die Kugel an jedem Hindernis nach links springen. Es gibt also genau einen Pfad, der die Kugel dorthin führt. Ingesamt gibt es 2^n Pfade. Jeder Pfad ist gleich wahrscheinlich. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, genau im linken Fach zu landen, $\frac{1}{2^n}$.

Für das zweite Fach ergibt sich durch analoge Überlegung (man muss genau einmal nach rechts gehen, wofür es genau n mögliche Pfade gibt) die Wkt. $n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Setze diese Überlegung für die weiteren Fächer fort.

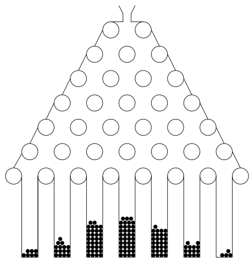
Allgemeine Formel

Sei n die Anzahl der Hindernisebenen des Bretts. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel im k-ten Fach landet ($0 \leq k \leq n$; $k = 0$ ist das äußere linke, $k = n$ das äußere rechte), ist gegeben durch

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{1}$$

Dabei ist $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$. Der Faktor $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der Pfade, die in Fach Nummer k führen: Wähle aus n Ebenen genau k aus (genau die Stellen, an denen man nach rechts geht). Die Verteilung in (1) nennt man Binomialverteilung.

Viele Kugeln

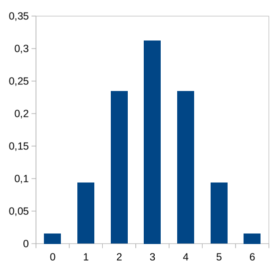


Das Gesetz der großen Zahlen

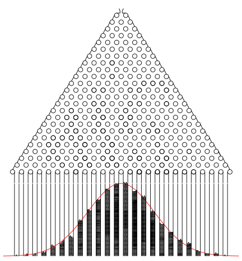
Was heißt es, dass die Wahrscheinlichkeit, im roten Fach zu landen, gleich $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$ ist ($n = 6$, $k = 3$ in den obigen Bildern)?

Die Wahrscheinlichkeit zu kennen, ist nur nützlich, wenn man eine große Anzahl an Versuchen macht, also viele Kugeln durch das Labyrinth an Hindernissen schickt. Die Anzahl der Kugeln in einem Fach wird dann proportional zu der Wahrscheinlichkeit sein, dass die Kugel dort landet (also zu der oben erwähnten Binomialverteilung). Dies ist eine Folgerung aus dem Gesetz der großen Zahlen: Relative Häufigkeiten nähern sich den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an.

Binomialverteilung



Viele Fächer



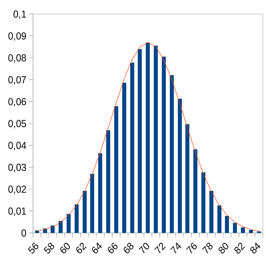
Der zentrale Grenzwertsatz

Hat man ein Galtonbrett mit vielen Fächern (und vielen Kugeln), so lässt sich die auftretende Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve) approximieren. Dies ist eine Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes. Die Formel für die Gaußsche Glockenkurve lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Diese Funktion muss angepasst werden (durch Verschiebung und Stauchung), um die entsprechende Binomialverteilung zu ‘fitten’ (vgl. rechtes Bild).

Normalverteilung



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik

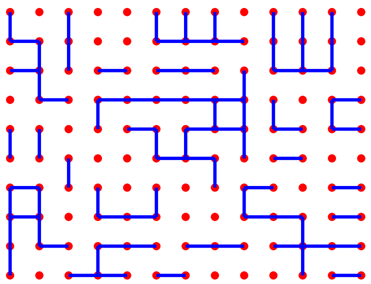
Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Perkolation

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Was ist eigentlich Perkolation...?

Perkolation kann durch ein Spiel veranschaulicht werden, bei dem man Wegpunkte (Knoten) und mögliche Pfade (Kanten) zwischen ihnen betrachtet. Jeder Pfad ist entweder begehbar (offen) oder unbegehbar (geschlossen). Mit $p \in [0,1]$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfad begehbar ist, wobei wir einzelne Pfade unabhängig voneinander betrachten. Das Ziel des Spiels ist es, herauszufinden, ob man von einem bestimmten Wegpunkt im Netzwerk zu einem anderen Wegpunkt laufen kann. Wegpunkte, die durch begehbare Pfade miteinander verbunden sind, bezeichnen wir als zusammenhängende Cluster. Wir interessieren uns dafür, wie weit wir bei welchem Wert p vermutlich laufen können.

...Und wieso sollte man sich damit beschäftigen?

Unabhängig davon, dass Perkolation für sich schon mathematisch interessant ist, können wir spannende Beispiele in der Wirklichkeit finden, bei denen wir unser Modell anwenden können. Ein Beispiel: Stellt euch vor, dass jeder in eurer Schule ein Knoten ist und die Verbindungen zwischen euch die Kanten sind. Wenn jemand krank ist, kann die Krankheit von einer Person zu einer anderen übertragen werden, indem man miteinander redet, sich die Hände gibt oder eine andere Art von Kontakt hat. Diese Verbindungen sind wie die offenen Pfade in unserem Spiel. Wenn die Krankheit von einer Person zu einer anderen übertragen wird, ist es so, als ob sie von einem Knoten zu einem anderen Knoten durch die offene Kante gelangt. Wenn es genügend viele offene Kanten gibt, dann könnte ein Großteil der Personen in der Schule infiziert werden, auch wenn anfangs nur eine einzige Person erkrankt ist.

Nutzen von Simulationen

Simulationen können im mathematischen Alltag sehr nützlich sein, auch wenn sie keinen Beweis ersetzen. Beispielsweise hilft eine Simulation, um zu erahnen, welches Resultat vermutlich bewiesen werden kann. Sie kann auch Aufschluss über auftretende Effekte geben, die im Beweis genutzt werden können. Wir benutzen Simulationen im Beispiel Perkolation.

Um Perkolation zu simulieren, nutzen wir ein Quadrat $[-n,\dots,n] \times [-n,\dots,n]$ in $\mathbb{Z}^2$, betrachten alle Kanten zwischen zwei benachbarten Punkten in diesem Gitter einzeln und würfeln zufällig mit Wahrscheinlichkeit p, ob die betrachtete Kante offen oder geschlossen ist. Rechts sind für diesen Prozess die größten entstehenden Cluster für $n = 500$ und $p \in \{0.5, 0.585, 0.59, 0.595\}$ dargestellt.

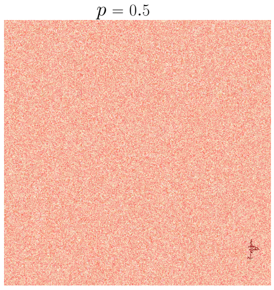
Mögliche Fragen, die bei diesen Bildern und beim Austesten der ausgestellten Simulation auftreten könnten, sind: Wenn n beliebig groß wird, existiert auch ein beliebig groß werdendes Cluster und, wenn ja, kann es mehrere geben? Wie groß ist der Anteil des größten Clusters gemessen an der Gittergröße? Im obigen Beispiel könnten damit folgende Fragestellungen diskutiert werden: Breitet sich die Krankheit an verschiedenen Orten getrennt voneinander aus? Falls sich eine Krankheit über die ganze Welt ausbreitet, wieviele Menschen sind ingesamt betroffen?

Der kritische Parameter

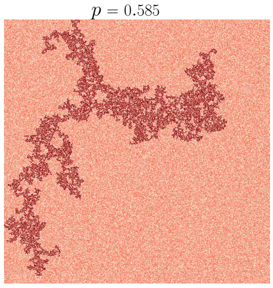
Der kritische Perkolationsparameter ist ein bestimmter Wert p_c, bei dem sich das Verhalten des Netzwerks dramatisch ändert. Für $p < p_c$ gibt es nur kleine zusammenhängende Cluster und es ist unwahrscheinlich, dass man von einem Knoten aus sehr weite Strecken gehen kann. Für $p > p_c$ gibt es ein großes zusammenhängendes Cluster, das sich über das gesamte Netzwerk erstreckt. Das bedeutet, dass beliebig große Distanzen innerhalb eines Clusters zurückgelegt werden können. Daher ist p_c der Übergangswert, bei dem das Netzwerk von einem Zustand mit kleinen zusammenhängenden Clustern zu einem Zustand mit einem großen zusammenhängenden Cluster wechselt.

Größte Cluster in Simulationen

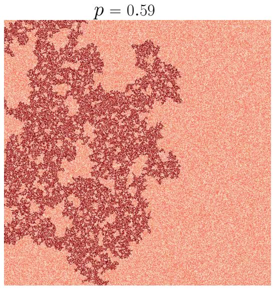
$p = 0.5$



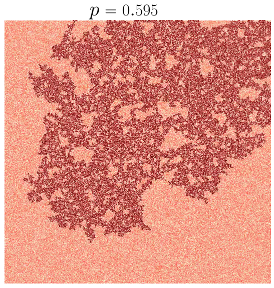
$p = 0.585$



$p = 0.59$



$p = 0.595$



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Eine unmögliche Wette

Lange Nacht der Mathematik 2025

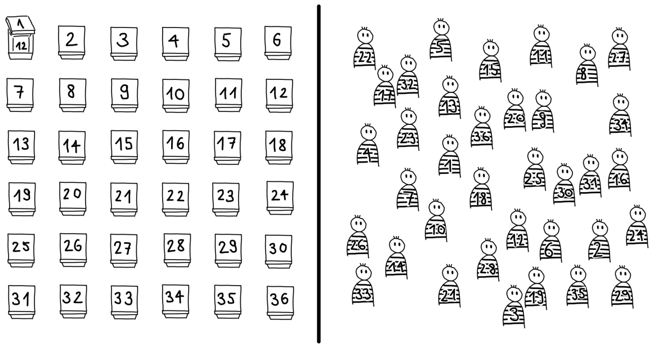
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Spielregeln

In einem Gefängnis gibt es 36 Gefangene, die eine Wette mit dem Gefängnisdirektor abschließen: Der Direktor nummeriert die Gefangenen von 1 bis 36 durch. Nun beschriftet er 36 identisch aussehende Boxen mit den Zahlen von 1 bis 36. Anschließend schreibt er die Zahlen von 1 bis 36 auf je einen Zettel und verteilt diese zufällig auf die Boxen, sodass in jeder Box genau ein Zettel liegt. Dann platziert er die Boxen in einem geschlossenen Raum.

Die Gefangenen dürfen nun, einer nach dem anderen, in diesen Raum gehen und 18 Boxen öffnen. Wenn jeder Gefangene seine eigene Nummer findet, dann lässt der Direktor alle Gefangenen frei. Wenn aber mindestens einer seine Nummer nicht findet, bleiben sie für immer eingesperrt. Die Gefangenen dürfen untereinander vorher eine Strategie zum Öffnen der Boxen vereinbaren. Sobald es losgeht, dürfen sie aber nicht mehr miteinander sprechen oder auf andere Weise ihre Beobachtungen kommunizieren.

Bitte spiele zuerst das Spiel am Stand, bevor du das Poster weiterliest!



Zufällige Strategie

Jeder Gefangene wählt zufällig die Hälfte der Boxen aus und öffnet sie. Dabei hat er eine Wahrscheinlichkeit von 50%, seine eigene Nummer zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 36 Gefangenen ihre Nummer finden, beträgt daher: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{36} \approx 0.0000000000146$, da die Erfolgswahrscheinlichkeit der Gefangenen jeweils unabhängig voneinander ist.

Zum Vergleich: Die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem einzigen Los im Lotto gewinnt, ist deutlich höher!

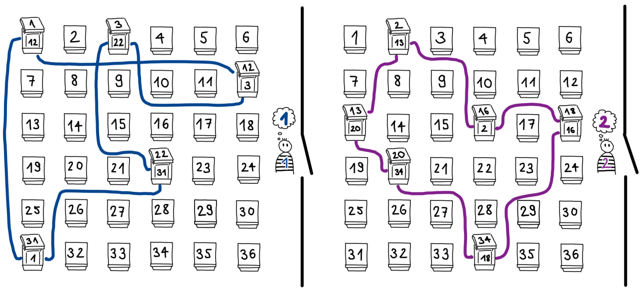
Es existiert jedoch eine Strategie, mit der die Erfolgswahrscheinlichkeit auf über 30% ansteigt.

Permutationsstrategie

Die Gefangenen nutzen eine andere Herangehensweise:

1. Jeder Gefangene beginnt bei der Box, die seiner eigenen Nummer entspricht.
2. Er öffnet diese Box und liest die Zahl, die er darin findet.
3. Als Nächstes geht er zur Box mit dieser Zahl und wiederholt Schritt 2.

Dies setzt sich so lange fort, bis er entweder seine eigene Nummer findet oder die maximal erlaubten 18 Schritte erreicht sind.

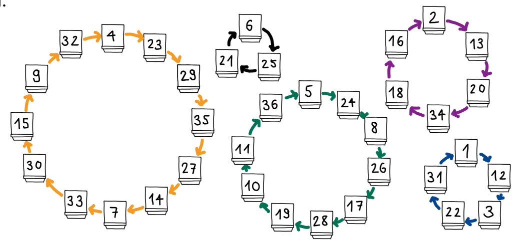


Auf diese Weise erhöht sich die Erfolgswahrscheinlichkeit auf etwa 32%. Doch warum ergibt diese Strategie Sinn?

Führt man die Schritte 1-3 ohne die Beschränkung auf 18 Schritte aus, findet man immer seinen eigenen Zettel: Angenommen, dem wäre nicht so. Die Schrittfolge endet nur, sobald man einen Zettel findet, dessen Box schon offen ist. Findet man seinen eigenen Zettel nicht, beendet man die Schrittfolge also mit einem anderen Zettel. Die Box zu diesem Zettel kann aber nur dann schon offen sein, wenn der Zettel zu der Box vorher schon gefunden wurde (denn die einzige Box, die ohne vorheriges Finden des Zettels geöffnet wurde, ist die Box mit der eigenen Nummer). Also müsste es den letzten Zettel zweimal gegeben haben.

Hintergrund: Kreise in Permutationen

Die Zuordnung der Zahlen in den Boxen kann als eine Permutation dargestellt werden, also als eine 1:1 Zuordnung der Zahlen. Jede Permutation lässt sich in Zyklen zerlegen:



Die eigene Zahl muss daher früher oder später in dem Zyklus auftauchen, denn spätestens nach dem Durchlaufen aller 36 Boxen muss der Zettel mit der eigenen Nummer gefunden worden sein. Entscheidend ist: **Jeder Gefangene findet seine Nummer, wenn der Zyklus, der seine Nummer enthält, höchstens 18 Boxen beinhaltet.**

Die Strategie ist also für alle erfolgreich, wenn kein Zyklus der Permutation länger als 18 Elemente ist. Die Erfolgswahrscheinlichkeit entspricht daher der Wahrscheinlichkeit, dass alle Zyklen der Permutation maximal die Länge 18 haben.

Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit

Um die Erfolgswahrscheinlichkeit zu berechnen, berechnen wir zunächst die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Summe der Wahrscheinlichkeiten für einen Zyklus der Länge k, wobei $k > 18$. Dann können wir diese von 1 abziehen und erhalten die gewünschte Wahrscheinlichkeit. Als Beispiel bestimmen wir diese Wahrscheinlichkeit nun für einen Zyklus der Länge 36.

Die Anzahl aller möglichen Zuordnungen der Zettel zu den Boxen beträgt $36!$. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Für die erste Box können wir einen beliebigen der 36 Zettel wählen, für die zweite Box bleibt eine Auswahl aus 35 Zetteln, für die dritte 34 Zettel, und so weiter, bis zur letzten Box, die nur noch einen einzigen verbleibenden Zettel enthält, also ist die Anzahl $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 1$.
Nun berechnen wir die Anzahl der Permutationen, die einen einzigen Kreis der Länge 36 bilden. Schreiben wir die Kreise auf, indem wir die erste Zahl aus 36 auswählen, die zweite aus 35 usw., so erhalten wir wieder $36!$ Möglichkeiten, die Zahlen in einem solchen Kreis aufzuschreiben. Allerdings haben wir hierbei jeden Zyklus mehrfach gezählt: Ein und derselbe Kreis kann an jedem beliebigen Punkt gestartet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Permutation genau einen einzigen Zyklus der Länge 36 enthält, ist daher $\frac{1}{36}$. Genauso beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Zyklus der Länge $k > 18$ genau $\frac{1}{k}$. Damit ergibt sich als Erfolgswahrscheinlichkeit tatsächlich $1 - \frac{1}{36} - \frac{1}{35} - \ldots - \frac{1}{19} \approx 32,05\%$

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Stochastik

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Die Fachschaft

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wer ist die Fachschaft?

Die Fachschaft Mathematik ist eine Gruppe von Mathematikstudierenden, welche sich am Fachbereich Mathematik aktiv für studentische Belange engagieren.
Wir sind offen für alle und organisieren unsere Arbeit basisdemokratisch. Dafür wird im Semester einmal wöchentlich die Fachschaftssitzung abgehalten.
Neben der inhaltlichen Arbeit kommen aber auch Freizeitveranstaltungen nicht zu kurz.

Was bietet die Fachschaft an?

Von der Fun-AG werden gesellige **Spieleabende** veranstaltet. Diese erfreuen sich großer Beliebtheit, denn dabei können in entspannter Atmosphäre die vielen und vielfältigen Spiele aus einer großen Sammlung ausprobiert werden.

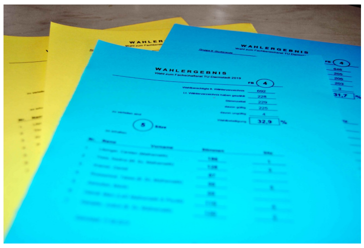
Seit vielen Jahren ist der **Mathechor** an der TU Darmstadt und im Besonderen am Fachbereich Mathematik etabliert. Die musikalische Bereicherung von diversen Veranstaltungen hat Tradition. Das Repertoire reicht von Pop über Filmmusik bis hin zu Metal, meist in fünfstimmiger A-Cappella-Besetzung.

Der **Ball der Mathematik** findet einmal im Jahr statt. Hier werden zu Livemusik viele Gesellschaftstänze getanzt und es gibt spektakuläre Show-Acts zu sehen, sodass der Abend abwechslungsreich und schwungvoll wird. Zur Vorbereitung dafür wird auch ein selbstgeleiteter Tanzkurs organisiert.

Ein Höhepunkt eines jeden Semesters ist der MMA, der **Mathemusikabend**. Ein abwechslungsreiches Programm mit Musik aus unterschiedlichen Stilrichtungen wird dargeboten. Dies bereitet nicht nur den Teilnehmenden, sondern auch den Zuhörenden viel Freude.

Was macht die Fachschaft?

Eigene Gremien beeinflussen und bestimmen die Organisation des Fachbereichs. Wir, die Studierenden, haben durch die fachschaftlichen Vertreter*innen ein Mitspracherecht in der Politik des Fachbereichs. Viele Themen werden von den Gremien in die Fachschaftssitzung getragen und dort in breiter Runde diskutiert. Umgekehrt können wir die studentischen Anliegen jedoch auch von der Fachschaftssitzung in die Gremien einbringen. Durch diese Arbeit beeinflussen wir den Studierendenalltag direkt und machen uns für studentische Interessen stark.



Auch über den Fachbereich hinaus sind wir hochschulpolitisch aktiv. Gemeinsam mit anderen Fachschaften der TU Darmstadt sind wir in der Fachschaftenkonferenz vertreten, stehen aber auch im Kontakt zu den Mathefachschaften anderer Universitäten.

Unsere Ziele sind:

- Vertretung der Interessen aller Mathestudent*innen (inkl. Studieninteressierter, neuer Studierender, benachteiligter Studierender)
- Schaffung eines angenehmen Studienklimas im Bezug auf studiengangsbezogene Aspekte (z.B. Gestaltung der Lernräume), sowie Freizeitmöglichkeiten
- Förderung von Gemeinschaft und Solidarität als Mathestudierende, Studierende der Uni, Angehörige des Mathefachbereichs, etc.
- Einbringung studentischer Interessen in demokratische Prozesse der Uni und insbesondere des Fachbereichs

Um den Studienanfänger*innen am Fachbereich einen guten Start zu ermöglichen, organisieren wir mit viel Engagement und Leidenschaft jedes Jahr die **Orientierungswoche**. Diese ermöglicht es neue Kontakte zu knüpfen und die Universität mit ihren komplexen Strukturen kennen zu lernen.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt
Fachschaft Mathematik
fachschaft@mathebau.de
www.mathebau.de

Die lange Nacht der Mathematik

Internetseite der Fachschaft

Angebote für Schüler*innen am Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2024

jährlich	**Lange Nacht der Mathematik** Schüler:innen, Lehrer:innen, Eltern und alle, die sich für Mathematik begeistern, können die Faszination der Mathematik mit einem interessanten Vortrag, spannenden Exponaten, Knobeleien und Einblicken in Studium und Forschung am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt erleben
09. März 2024 09:00 – 15:00 Uhr	**Tag der Mathematik** Du bist in der Jahrgansstufe 12? Mathematikbegeisterte Schülerinnen und Schüler können in einem spannenden Wettbewerb eine Teilnahme an der Modellierungswoche gewinnen. **Anmeldung bis 24.2.2024**
25. April 2024	**Girls‘ Day** Am Girls‘ Day können Schülerinnen die naturwissenschaftlichen, technischen, handwerklichen, ingenieurwissenschaftlichen und IT-Bereiche der TU Darmstadt besuchen. Es warten zahlreiche Labors und Werkstätten in unterschiedlichen Fachbereichen auf neugierige und begeisterungsfähige Schülerinnen.
ab 22.04.2024 immer Mo 16:30-18:00 Uhr	**Mathezirkel** Du bist in Klasse 10 oder höher? Du begeisterst dich für Mathematik und willst mehr erfahren, als du in der Schule lernst? Dann ist der Mathezirkel genau das richtige für Dich! Jedes Semester vermitteln unsere Mathematikerinnen und Mathematiker spannende Themen aus der Mathematik in abwechslungsreichen Vorlesungen.

Ende Januar, im Mai

hobit talks/ hobit contact – Was will ich mal werden?

Bei dieser Frage versuchen die TU Darmstadt und weitere Kooperationspartner dich bei der Suche nach einer Antwort zu unterstützen.

Januar: online, Mai: Campus Stadtmitte Karo 5

Sommer 2024

Schüler*innennachmittag

Der Fachbereich Mathematik führt regelmäßig Schülerinnen- und Schülernachmittage zur Mathematik durch, die Schülerinnen und Schülern (ab Klassenstufe 10) einen Einblick in die Vielfalt der modernen Mathematik liefern.

---

laufend

Math on Demand

Wir kommen zu dir vor Ort oder stellen ein Ausflugsprogramm für deine Klasse an unserem Fachbereich zusammen mit einem mathematischen Vortrag, Informationen zum Studium und Austauschmöglichkeiten mit Studierenden.

Kontakt: oeffentlichkeitsarbeit@mathematik.tu-darmstadt.de

Bleib auf dem Laufenden

Melde dich für unseren E-Mailverteiler „FutureStudents“ an!
In unregelmäßigen Abständen erhältst du von uns E-Mails mit Informationen zu Veranstaltungen oder zum Mathematikstudium an unserem Fachbereich.

---

studi.treff

Der studi.treff ist ein ungezwungenes Gespräch mit Studierenden unseres Fachbereichs. Studieninteressierte können sich mit allen ihren Fragen an Studierende wenden.

Ort: Campus Stadtmitte, S2/15 Raum 347 (Fachschaftsraum)
Zeit: nach vorheriger Anmeldung (studi.treff@mathebau.de**)**

Studienberatung (nach Terminvereinbarung)
bei der Studienkoordinatorin Cornelia Seeberg.
(studienberatung@mathematik.tu-darmstadt.de)

---

laufend

Weitere Informationen…
für Schüler*innen, Studieninteressierte, Lehrkräfte und Mathe-Interessierte findest du auf unseren Webseiten.

Faszination Mathematik
Artikel von Prof. Dr. Kümmerer

Mathematik

Von Prof. Dr. Burkhard Kümmerer

Warum? Was? Wozu? Wer? Wie? Wo? Weiteres?

Was fällt Ihnen zu Mathematik ein? Aufregend - überall - schön – Schlüsseltechnologie - Freiheit? Dann wissen Sie schon recht gut Bescheid! Das ist natürlich noch lange nicht alles, aber schon viel Wichtiges. Warum sonst kommen ganz vernünftige Leute auf die Idee, sich mit Mathematik zu beschäftigen, womöglich ein Leben lang? Denken macht Spaß, g e n a u e s Denken noch mehr. Mit Phantasie und Freude am Schönen in Gedankengebirgen umher klettern, ohne dabei die Bodenhaftung zu verlieren, das kann süchtig machen. Wenn Sie Lust auf's Denken haben und von einem Problem erst lassen können, wenn Sie es wirklich verstanden haben, dann könnte es gut sein, dass Sie für die Mathematik geeignet sind. Diese Seiten sollen Sie neugierig machen und Ihnen eine erste Orientierung über ein Mathematikstudium an einer Universität geben. Wenn Sie sich überlegen, ob Sie Mathematik studieren wollen, werden Sie eine Reihe von Fragen haben: Warum? Was? Wozu? Wer? Wie? Wo? Weiteres? Auf diese Fragen wollen die folgenden Seiten eingehen.

Mathematik – eine Übersicht

Was soll ich mir unter Mathematik vorstellen? Besteht Mathematik nicht vor allem aus Rechnen? Und braucht man heute überhaupt noch Mathematik? Dafür gibt es jetzt doch Computer! Mathematik ist doch sehr weltfremd und abstrakt, wie soll man das denn anwenden können? Mathematik ist eine Antwort auf die Fragen einer immer komplexeren Welt. Mathematik bringt Ordnung in komplizierte Gedankengebäude wie auch in unübersichtliche reale Situationen. Das kann sie gerade deshalb so gut, weil sie abstrakt ist. Rechnen können Computer oft schneller als Menschen und natürlich nutzen das auch Mathematikerinnen und Mathematiker; aber erst, nachdem sie vorher nachgedacht haben - normalerweise. Wie jede große Frage kann auch die Frage "Was ist Mathematik" niemand erschöpfend beantworten und d i e Mathematik gibt es gar nicht.

Unter Mathematik stellen sich verschiedene Menschen ganz verschiedene Dinge vor, und sie alle haben recht. Es gibt die Mathematik des Alltags, das Addieren von Preisen, das Bestimmen von Grundstücksgrößen oder von Kubikmetern umbauten Raumes. Diese Mathematik ist alt, sie unterscheidet sich nicht wesentlich von der Mathematik der alten Ägypter oder Babylonier, auch wenn sie damals weniger weit verbreitet war. Es gibt die Schulmathematik - Mathe: Ebene Geometrie, Formeln wie $a^2 + b^2 = c^2$ (was bedeutet das eigentlich?) oder Kurvendiskussionen kommen ins Gedächtnis. Diese Mathematik besteht aus Formeln, Vorschriften für das Hantieren mit mathematischen Gegenständen, Begründungen. Es gibt die Mathematik der Naturwissenschaftler und Ingenieure: eine Art fortgeschrittener Schulmathematik, ein außerordentlich hilfreiches und nützliches Modell für bestimmte Teile der Wirklichkeit.

Neben den oben genannten Beispielen gibt es schließlich seit etwa zweihundert Jahren die Mathematik, die in einem Mathematikstudium hauptsächlich gelehrt wird. Eine abstrakte Mathematik, eine Mathematik möglicher, gedachter Welten, komplexe Welten aus Strukturen, die jeder von neuem in seiner Vorstellung zum Leben erwecken muss. Der Unterschied zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik führt oft zu Missverständnissen. Es ist gut, ihn im Auge zu behalten.

W a s ist Mathematik? Das ist wie mit der Frage “Was ist Musik?“ Man muss sie erfahren. Dann kann man die Frage zwar immer noch nicht beantworten, aber dieses schon etwas besser... Immerhin, einige Eigenschaften von Mathematik kann man festhalten, und das soll im Folgenden geschehen.

Angewandte Mathematik

In einer Diskussion über die Bedeutung der Mathematik steht dieser Aspekt meist im Vordergrund. In der Tat sind die Erfolge der Mathematik in fast allen Bereichen der modernen Gesellschaft beeindruckend: naturwissenschaftliche Theorien bedienen sich mathematischer Erkenntnisse, viele Ingenieurleistungen beruhen auf umfangreicher mathematischer Modellbildung und auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften hält die Mathematik zunehmend Einzug. Ein Teil der Mathematik wird unmittelbar im Hinblick auf diese Anwendungen entwickelt, häufig in Zusammenarbeit mit Naturwissenschaftlern und Ingenieuren.

Ein anderer Teil aber, die theoretische Mathematik, wird aus innermathematischer Notwendigkeit weiterentwickelt. Und gerade diese Ergebnisse führen immer wieder zu den überraschenden Anwendungen. Der Grund: abstrakte Mathematik legt sich nicht von vornherein auf eine Bedeutung fest und ist daher offen für immer neue Interpretationen und damit für neue Anwendungen.

Ein Beispiel aus der Geschichte: um 1800 haben C.F. Gauß und andere die nichteuklidische Geometrie entwickelt - eine ziemlich verrückte Geometrie, mit der Wirklichkeit hat sie offenbar nichts zu tun. Aus ihr entstand im 19. Jahrhundert die Riemannsche Geometrie, noch abstrakter. Aber: hätte Albert Einstein nicht eben diese Theorie vorgefunden, hätte er nach eigenem Bekunden seine allgemeine Relativitätstheorie gar nicht formulieren können. Ohne die Korrekturen der allgemeinen Relativitätstheorie aber würde heute kein GPS-System die Position bis auf wenige Meter bestimmen können.

Ein anderes Beispiel: bis um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts war man sich sicher, dass die Zahlentheorie zwar vielleicht nach Gauß die Königin der Mathematik sei, aber bestimmt nie angewandt werden könne. Jedoch: ohne Zahlentheorie würde heute kein Handy und kein Magnetstreifen auf einer Plastikkarte funktionieren. Solche Beispiele gibt es beliebig viele. Offenbar wird jede Mathematik auch irgendwann nützlich, vielleicht erst in hundert Jahren, aber dann braucht man sie wirklich dringend.

Mathematik ist Organisation von Komplexität

Viele unserer Absolventen arbeiten später in Berufen, in denen sie die erlernten mathematischen Theorien gar nicht mehr brauchen (vgl. den Abschnitt Berufsfelder für Mathematiker). Trotzdem sind sie sinnvoll eingesetzt. Denn Mathematik ist mehr als eine Ansammlung mathematischer Theorien: Mathematik ist Organisation von Komplexität.

Durch die intensive Beschäftigung mit Mathematik wird strukturiertes Denken zur Bewältigung komplexer Probleme erlernt, das offenbar auf andere Weise kaum erworben werden kann. Dazu gehört zum Beispiel:

- Anschauliches Denken zur Verdeutlichung abstrakter komplexer Sachverhalte.
- Die richtige Vereinfachung komplizierter Probleme finden.
- Ein angemessenes Begriffssystem zur Beschreibung komplexer Sachverhalte erstellen.
- Eine gute Intuition für die Komplexität eines Problems entwickeln.
- Genauigkeit im Denken: der Teufel steckt im Detail.

Es ist offensichtlich, wie hilfreich diese Fähigkeiten bei der Bewältigung vieler Probleme sein können, die auf den ersten Blick nicht viel mit Mathematik zu tun haben; gerade dann, wenn es sich um unübersichtliche, also komplexe Fragestellungen handelt. Alle diese Fähigkeiten sind bis zu einem gewissen Grade erlernbar und werden in einem Mathematikstudium gelernt; und zwar durch die Beschäftigung mit Mathematik, genauer: durch die i n t e n s i v e Beschäftigung mit Mathematik.

Mathematik ist Kultur

Man wird der Bedeutung der Mathematik nur gerecht, wenn man auch diese Seite kurz beleuchtet. Mathematik ist wohl die älteste aller Wissenschaften: seit mehr als 2500 Jahren gibt es sie als “reine Wissenschaft“. Seither steht sie Pate für unseren Begriff von Wissenschaftlichkeit und viele andere Disziplinen haben sich daran orientiert. Die Mathematik ist eine der großen geistigen Errungenschaften der Menschheit, und Mathematiker, bisher leider seltener Mathematikerinnen haben immer auch wichtige Positionen im kulturellen und öffentlichen Leben eingenommen (z.B. Pythagoras, Archimedes, Pascal, Descartes, Kepler, Leibniz, Newton, d'Alembert, Gauß, Klein u.v.a.). So ist die Beschäftigung mit Mathematik auch eine Beschäftigung mit einer großen Kulturleistung. Und da Mathematik zeitloser ist als jede andere Wissenschaft, ist man hier den großen Denkern der Vergangenheit so nahe wie kaum sonst. Mathematik ist lebendiger denn je!

Mathematik ist weder Physik noch Informatik

Aus dem oben Ausgeführten wird schon deutlich: Ein Mathematikstudium unterscheidet sich grundsätzlich von der Mathematikausbildung für Naturwissenschaftler oder Ingenieure, ebenso wie auch von einem Informatikstudium. Natur- und Ingenieurwissenschaften benötigen die mathematische Sprache als Werkzeug zur Formulierung ihrer Modelle der Wirklichkeit. Sie dient der effizienten Beschreibung und Beherrschung verschiedener Bereiche unserer Welt, und dies wird im Studium eingeübt. Inhalt der Mathematik dagegen ist die mathematische Sprache selbst.

Gegenstand der Informatik ist die Welt der Computer. Sie befasst sich zum Beispiel mit Design und Architektur von Prozessoren und Computern, mit Softwareengineering, mit Datenbanken und Programmiersprachen. Im Unterschied dazu sind Computer für Mathematiker nicht Studienobjekte sondern Arbeitsgeräte. Sie benutzen sie zum Lösen mathematischer Probleme, zur Beschleunigung sich ständig wiederholender Denkvorgänge, so wie die meisten von uns Verkehrsmittel zur beschleunigten Fortbewegung nutzen, ohne sich ausführlich mit deren Innenleben zu befassen. Einige Bereiche der Mathematik befassen sich auch damit, mathematische Probleme so aufzubereiten, dass sie mit Computerhilfe angegangen werden können. Hier gibt es also interessante Berührungspunkte für Kooperationen zwischen Mathematik und Informatik und die Studierenden setzen sich während des Studiums auch mit diesen Seiten der Mathematik auseinander. Mathematik und alle diese Fächer können sich also gut ergänzen, sie sind aber inhaltlich grundverschieden.

Das Studium der Mathematik

Wie sieht ein Mathematikstudium aus? So wie der Mathe-Unterricht an der Schule? Und welchen Abschluss soll ich anstreben? In einem Mathematikstudium besuchen Sie zu verschiedenen Themen Vorlesungen und begleitende Übungen, dazu Seminare, manchmal Praktika. Das ist schon ziemlich anders als in der Schule. Vor allem: Sie brauchen viel Zeit zu eigenverantwortlicher Beschäftigung mit Mathematik. Je mehr Sie diese Zeit für intensive Diskussionen mit anderen Studierenden nutzen, desto besser ist es. Den Alltag unserer Mathematikstudenten prägen:

- Vorlesungen, die man besuchen und regelmäßig nacharbeiten sollte,
- Übungen, für die man viele Übungsaufgaben lösen muss,

- Seminare, in denen man selbst einen mathematischen Vortrag vorbereitet und hält.

Daneben gibt es Phasen der Prüfungsvorbereitung und die Zeiten, in denen eine wissenschaftliche Abschlussarbeit entsteht.

Arbeitsweisen

Mathematik studieren heißt selbstständig arbeiten. Verglichen mit anderen, insbesondere ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen sieht der Stundenplan für Mathematik im Semester viele "freie" Zeiten vor für selbstständiges Arbeiten; während der vorlesungsfreien Zeit werden normalerweise gar keine Veranstaltungen angeboten. Für die Vorlesungen gibt es, anders als in der Schule, keine Anwesenheitspflicht. Trotzdem arbeiten die Studierenden viel, sie können sich lediglich ihre Zeit freier einteilen. Sie brauchen Selbstdisziplin und einen langen Atem, denn Mathematik versteht man nicht "auf Anhieb oder nie", sondern eher "mit jedem Mal ein bisschen besser".

Mathematik ist auch eine Sprache, und Sprachen muss man sprechen. Nicht selten findet sich eine lange gesuchte Lösung schon beim ersten Versuch, einem Studienkollegen zu erklären, wo das Problem liegt. In der Gruppe gibt man nicht so schnell auf, beißt sich aber auch nicht so leicht fest. Die Mühe, passende Partner zu suchen und Teamarbeit zu lernen, lohnt sich in jedem Fall, auch im Hinblick auf das spätere Berufsleben.

Es ist nutzlos, Definitionen und Sätze auswendig zu lernen; nur verstandene Mathematik kann man eigenständig wieder benutzen, daneben bleibt sie auch leichter im Gedächtnis. Im Laufe des Studiums soll man sich vertraut machen mit mathematischen Begriffsbildungen, Denkweisen und Methoden und man soll lernen, sein Wissen effektiv und ideenreich auf verschiedene Probleme anzuwenden. Dafür muss man regelmäßig üben, aber wenig auswendig lernen. Jedes Element des Mathematikstudiums trägt auf seine Weise dazu bei, diese Ziele zu erreichen.

Vorlesungen

In einer Vorlesung erklärt ein Dozent, noch immer zu selten eine Dozentin, den Aufbau einer mathematischen Theorie. Vorlesungen sind das Rückgrat eines Mathematikstudiums, anders als in den meisten Geisteswissenschaften. In den Eingangsvorlesungen des Grundstudiums, die alle Studierenden gemeinsam besuchen, werden die beiden "Hauptsäulen" der Mathematik, die Analysis und die lineare Algebra aus wenigen Grundannahmen systematisch aufgebaut.

Im weiteren Verlauf besuchen die Studierenden zunächst Vorlesungen, die in verschiedene Gebiete der Mathematik einführen, später bauen weiterführende Spezialvorlesungen darauf auf und führen in einem Gebiet zu einer wissenschaftlichen Abschlussarbeit. Der Stoff wird an der Universität weniger ausführlich besprochen als in der Schule. Umso wichtiger ist es daher, die Vorlesungen selbstständig nachzuarbeiten.

Übungen

Zu vielen Vorlesungen werden Übungen angeboten. Die Studenten bearbeiten (schriftlich oder mündlich) Übungsaufgaben zum Stoff der Vorlesung und treffen sich jede Woche in kleineren Gruppen mit ihrer Tutorin oder ihrem Tutor. In diesen Übungsgruppen werden die bearbeiteten Aufgaben besprochen, oft werden auch kleinere Aufgaben in den Übungen bearbeitet.

Die Aufgaben lassen sich in den seltensten Fällen mit Routine lösen, anders als bei vielen Hausaufgaben in der Schule. Das kostet viel Zeit und füllt einen beträchtlichen Teil der Lücken, die der Stundenplan zulässt. Bearbeiten der Übungsaufgaben sind die Trainingseinheiten des Mathematikstudiums, ohne sie geht nichts. Oft finden sich die Studentinnen und Studenten hierfür zu kleinen Gruppen zusammen und verbringen ganze Nachmittage über einem Übungsblatt.

Seminare

In einem Seminar wird ein mathematisches Teilgebiet wesentlich tiefer und wesentlich selbstständiger erarbeitet, als es in einer Vorlesung möglich ist. Jeder Teilnehmer erhält ein spezielles Thema zur Bearbeitung. Unter Anleitung arbeitet man sich in dieses Thema ein und bereitet einen ein- bis eineinhalbstündigen Vortrag dazu vor. Diese Arbeit geschieht meist während der vorlesungsfreien Zeit. Während der Vorlesungszeit werden dann die Vorträge gehalten. In den Seminaren erlebt man die Mathematik gewissermaßen “bei der Arbeit“, erfährt, wie neue Theorien entstehen und offene Fragen beantwortet werden. Oft findet hier der erste Kontakt mit jener aktuellen Mathematik statt, die noch Gegenstand der Forschung ist. Die Studierenden sollen in einem Seminar also lernen, sich selbstständig in ein Gebiet einzuarbeiten und das neu erworbene Wissen in verständlicher Form an Andere weiterzugeben; zwei wichtige Fähigkeiten, die sie später im Berufsleben brauchen werden.

Die wissenschaftliche Arbeit

Diese Aspekte werden in den wissenschaftlichen Arbeiten intensiviert. Je nach Studiengang schließt das Studium mit einer Diplom- oder Zulassungsarbeit (für das Staatsexamen) ab, oder man erstellt für den Bachelor eine erste kleinere wissenschaftliche Arbeit, für den Master wird die Arbeit dann ein Stück umfangreicher und anspruchsvoller, etwa vergleichbar einer Diplomarbeit.

Wer eine wissenschaftliche Arbeit schreibt, arbeitet sich, betreut von einem Dozenten, auf der Grundlage wissenschaftlicher Veröffentlichungen in eine aktuelle Fragestellung ein. Das Nachvollziehen fremder Gedankengänge und die Entwicklung eigener Ideen können dabei fließend ineinander übergehen. Manchmal wird in solch einer Arbeit auch schon mal ein neuer mathematischer Satz bewiesen.

Klassische und neue Abschlüsse

Bis vor kurzem gab es im wesentlichen zwei Abschlüsse für ein Mathematikstudium an einer deutschen Universität: das Diplom und das Staatsexamen. Das Staatsexamen qualifiziert für eine Tätigkeit als Lehrerin oder Lehrer an einer höheren Schule und wird bis auf weiteres bestehen bleiben. Der klassische Diplomstudiengang gliedert sich in ein etwa zweijähriges Grundstudium und ein drei- bis vierjähriges Hauptstudium. Er wird gegenwärtig in vielen Universitäten durch einen Bachelor-Master-Studiengang ersetzt, um im Gefolge des sogenannten Bologna-Prozesses das Universitätsstudium in Europa zu harmonisieren und durchlässiger zu gestalten. Ein dreijähriges Studium schließt mit einer Bachelor-Prüfung ab und kann dann mit einem etwa zweijährigen Master-Studium fortgesetzt werden.

Studierende der Mathematik

Natürlich muss Ihnen strukturiertes logisches Denken liegen, aber das wissen Sie sicher schon. Daher muss das hier nicht weiter vertieft werden. Mathematik studiert nur, wer Lust auf Mathematik hat. Das gilt eigentlich für jedes Fach, aber für Mathematik noch ein bisschen mehr. Den berühmten Königsweg zur Mathematik, den schon Euklid nicht kannte, hat bis heute niemand gefunden. Daher ist Mathematik immer noch anstrengend und man braucht Lust, um diese Anstrengung zu genießen.

Woher kann diese Lust kommen? Es gibt Lehrerinnen und Lehrer, die Lust auf Mathematik machen können. Sie haben in der Schule vermittelt, dass Mathematik nicht aus dem stumpfsinnigen Abarbeiten von Rechenvorschriften besteht, sondern Tore in eine faszinierende Gedankenwelt öffnet. Und sie haben den Freiraum geschaffen, in welchem jeder selbst erfahren kann, wie befreiend und beglückend es ist, wenn sich durch Gedankenarbeit unvermutet Klarheit einstellt, sich die Schleier lüften, und ein neues Stück mathematischer Landschaft vor dem geistigen Auge klar hervortritt.

Lust auf Mathematik ist oft Lust auf Verstehen, etwas so gut zu verstehen, dass man nicht mehr weiter nach einem Warum fragen muss, Neugierde, auf den Boden der Dinge zu sehen. In jedem Jahrgang gibt es Studierende, die bald zu ihrem eigentlichen Fach noch Mathematik dazu nehmen: Nur so glauben sie, ihr Fach richtig verstehen zu können.

Lust auf Mathematik kann auch Lust auf Genauigkeit im Denken und im Sprechen sein. Denken in klaren Begriffen und Sprechen in eindeutigen Formulierungen. Jede Wissenschaft ist auch Sprache. Den ersten Platz für die genaueste, für die eindeutigste, dieunmissverständlichste

Sprache kann die Mathematik getrost für sich beanspruchen.

Lust auf Mathematik ist auch Lust auf die Schönheit der Mathematik: Das Baumaterial der Mathematik sind Argumente, schöne Argumente. An manchen Argumenten haben viele große Denker über Jahrhunderte gearbeitet, sie geformt, poliert, passend angeordnet. Sicher, man muss sich oft mühsam hocharbeiten, um einen Blick auf sie werfen zu können und ihre Schönheit genießen zu können; aber welcher Bergsteiger kennt das nicht.

Das vielleicht Erstaunlichste an diesem Gedankengebäude: es hat mit der Welt zu tun, sehr viel sogar. Mathematische Theorien, wie abgehoben sie auch scheinen mögen, irgendwann werden sie doch genutzt, um wieder einen Teil der Natur zu beschreiben, eine neue Technologie zum Funktionieren zu bringen, Unvorhersagbares vorhersagbar zu machen.

Vielleicht ist es gerade diese Symbiose zwischen abstraktem Gedankengebäude und Praxis, die viele Mathematikerinnen und Mathematiker am meisten an der Mathematik fasziniert.

Schulnote ist kein zuverlässiger Indikator

In den vorangegangenen Absätzen wurde es schon gesagt: Mathe an der Schule und Mathematik an der Universität sind oft recht verschiedene Dinge. Aus diesem Grund ist auch die Schulnote in Mathematik nur ein unzureichender Indikator für die Studienwahl. Daher stellen in jedem Jahrgang einige Studierende zu Beginn ihres Studiums fest, dass Mathematik doch nicht das Richtige für sie ist; das können wir kaum verhindern. In jedem Jahrgang gibt es aber auch Studierende aus Nachbarfächern, die erst in ihren Mathematik-Veranstaltungen feststellen, dass Mathematik genau das Richtige für sie ist, und die daher zur Mathematik wechseln; das wollen wir nicht verhindern.

Englischkenntnisse

Streng genommen setzt das Mathematikstudium kein Schulwissen voraus, denn an der Universität wird die Mathematik systematisch von unten neu aufgebaut. Das stimmt natürlich nicht ganz, denn die Grundrechenarten sollten Sie schon beherrschen. Aber ein Leistungskurs in Mathematik ist keine notwendige Voraussetzung für ein Mathematikstudium. Umgekehrt kann auch ein Leistungskurs in Physik, Musik oder Latein eine gute Voraussetzung für ein Mathematikstudium sein. Außerdem: ohne Englisch kommt man in Mathematik nicht weit. Viele gute Mathematik-Bücher erscheinen nur in Englisch. Nun ist mathematisches Englisch nicht schwer. Es ist sehr viel leichter, ein englisches Mathematikbuch zu lesen, als eine englische Zeitung, aber trauen muss man sich schon.

Lust am Denken

Es wurde eingangs schon festgehalten: Die wichtigste Voraussetzung für ein Mathematikstudium ist die Freude am Denken. Wenn Sie sich von einem Problem fesseln lassen, wenn sie nicht mehr davon lassen können, bis sie es verstanden und gelöst haben, und zwar ganz gelöst haben, dann sollten Sie über ein Mathematikstudium nachdenken. Hierbei spielt es keine Rolle, ob es sich um mathematische Probleme, um Knobelaufgaben oder um ganz andere Dinge handelt, die durch Denken vorwärts gebracht werden können. Mathematik ist Hochleistungssport fürs Gehirn. Entsprechend hart ist manchmal das Training, das ist wie bei jedem Hochleistungssport. Sie brauchen Geduld, sogar Hartnäckigkeit, und Konzentrationsfähigkeit. Die Freude am Denken und am Verstehen wird Ihnen helfen, auf Ihren intellektuellen Abenteuerreisen die eine oder andere Durststrecke zu überstehen.

Hang zur Genauigkeit

Sie sollten Freude an Genauigkeit haben: Noch mehr als in allen Nachbarwissenschaften ist mathematisches Denken genau, sucht jede Ecke nach möglichen Ausnahmefällen ab. Am besten kann das ein gerne erzählter Witz illustrieren: ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker reisen im Zug durch Schottland. Draußen sehen sie ein schwarzes Schaf. “Das ist ja interessant“, ruft der Ingenieur, “In Schottland sind die Schafe schwarz!“ “Aber Herr Kollege“, widerspricht der Physiker, “Sie können nur behaupten, dass es in Schottland wenigstens ein schwarzes Schaf gibt“. Meldet sich der Mathematiker nachdenklich zu Wort: “Auch das ist noch nicht bewiesen: Wir können höchstens schließen, dass es in Schottland mindestens ein Schaf gibt, das auf wenigstens einer Seite schwarz ist.“ Wenn Sie jetzt anfangen nachzudenken, ob man nicht den Mathematiker noch durch einen übergenauen Mathematiker übertrumpfen kann, dann ist das ein weiteres Indiz, dass Sie ernsthaft über ein Mathematikstudium nachdenken sollten.

Genauigkeit im Denken ist am Ende auch eine der Qualifikationen, die Sie für so viele unterschiedliche Berufe qualifizieren wird. Übrigens: dieser Text ist von einem Mathematiker geschrieben. Das erkennen Sie unter anderem daran, dass viele Sätze ein “meistens“, ein “fast immer“ oder ein “in der Regel“ enthalten. Den Mut, die eine tatsächliche oder mögliche Ausnahme zu übergehen, bringt man als Mathematiker nur sehr schwer auf, selbst wenn es nicht gut für die Lesbarkeit ist.

Phantasie und Kreativität

Phantasie und Kreativität sind wichtige Voraussetzungen für eine tiefergehende Beschäftigung mit Mathematik: Phantasie, um Ihre eigene mathematische Gedankenwelt zu erschaffen, in der Sie sich bewegen können, in der Sie Mathematik sehen können. Kreativit ät, um Probleme zu lösen: die Probleme, die Sie in der Mathematik und später als ausgebildete Mathematikerin lösen, sind gerade die Probleme, die sich nicht nach vorgefertigten Schablonen lösen lassen, hier ist Kreativität gefragt.

Ein Wort an die Frauen

Bei meiner eigenen Tochter habe ich erlebt: auch heute noch werden Schülerinnen nicht immer zur Mathematik ermutigt, selbst wenn sie Freude daran haben - nicht von jedem Lehrer und, was mich noch mehr überrascht hat, auch nicht immer von den Mitschülerinnen. Zum Glück nähert sich das Geschlechterverhältnis unter den Mathematikstudierenden zunehmend dem Gleichgewicht an, bei den Lehrenden sind wir leider noch nicht so weit. Also: Liebe Schülerinnen, wenn Sie Lust auf Mathematik haben, dann hören Sie auf Ihre innere Stimme, schließlich geht es um die Mathematik.

Wahl des Studienortes und des Hochschultyps

Wo kann und wo soll ich Mathematik studieren? An einer Fachhochschule oder an einer Universität? Welcher ist der passende Studienort? Ein Studium an einer Fachhochschule ist kürzer, eher praxisorientiert, persönlicher betreut als ein Studium an der Universität. Das Studium an der Universität ist anspruchsvoller, lässt mehr Wahlmöglichkeiten zu und ist eher wissenschaftlich orientiert.

Mathematik studieren können Sie an den meisten deutschen Universitäten und an gegenwärtig 14 Fachhochschulen. Sie haben also eine große Auswahl. Welches der für Sie geeignete Studienort ist, hängt zu einem großen Teil von persönlichen Präferenzen ab. Über diese Gesichtspunkte hinaus gibt es natürlich eine Reihe weiterer persönlicher Vorlieben, welche die Wahl des Studienortes beeinflussen werden, z.B. große oder kleine Stadt, große oder kleine Universität, Flair, Freizeitmöglichkeiten, Zimmerpreise, Verkehrsanbindung, Entfernung vom Heimatort, und vieles mehr. Wenn Sie also eine Vorauswahl getroffen haben: fahren Sie hin, schauen Sie sich die Gegebenheiten an. Meist merkt man recht schnell, ob man sich wohl fühlt. Die folgenden Gesichtspunkte könnten Ihnen helfen, wichtige Fragen zu stellen.

Fachhochschule oder Universität?

Das Studium an einer Fachhochschule unterscheidet sich in vielerlei Hinsicht vom Studium an einer Universität. Ziel einer Fachhochschulausbildung ist eine praxisnahe Ausbildung in überschaubarer Zeit (meist 6 bis 7 Semester). Der Studienverlauf ist im allgemeinen recht genau vorgegeben, die Anbindung an die Praxis spielt schon während des Studiums eine große Rolle. Meist sind längere

Praktika vorgeschrieben und die Dozenten bringen in der Regel mehrjährige Berufserfahrungen von außerhalb der Hochschule mit. Kleine Studierendenzahlen ermöglichen eine persönliche Betreuung.

Ziel eines Studiums an einer Universität ist die wissenschaftliche mathematische Ausbildung in Breite und Tiefe. Für ein Studium sind üblicherweise 9 bis 10 Semester vorgesehen, meist dauert es aber etwas länger. Viele Wahlmöglichkeiten geben einen großen Spielraum für die individuelle Studiengestaltung, das Studium stellt aber auch höhere Anforderungen an die Selbstständigkeit. Je nach Studiengang und Schwerpunktsetzung werden in unterschiedlicher Gewichtung praxisrelevantes Wissen und mathematisches Denken vermittelt. Insbesondere spielt auch in einem anwendungsorientiert angelegten Studium die theoretische Mathematik als Grundlage eine wichtige Rolle.

Klassische Universität oder technisch orientierte Universität?

Universitäten haben eine Geschichte und ein Profil. Beides prägt auch die Mathematikausbildung. Klassische Universitäten sind meist viele hundert Jahre alt und haben traditionelle Schwerpunkte in den Geistes- und Naturwissenschaften, selten sind hier Ingenieurwissenschaften in größerem Umfang vertreten. Technisch orientierte Universitäten waren früher meist technische Hochschulen (oder sind es noch), hier nehmen die Ingenieur- und Naturwissenschaften einen breiten Raum ein. Auch sie pflegen, wie der Name "Universität" besagt, die Geisteswissenschaften, aber nur selten in gleichem Umfang wie eine klassische Universität.

Nebenfächer und Studiengänge

In einem Mathematikstudium studieren Sie nicht nur Mathematik sondern auch ein Nebenfach. Hier können Sie weiteren Neigungen nachgehen oder im Hinblick auf eine angestrebte Berufstätigkeit schon Schwerpunkte setzen. Die angebotenen Fächerkombinationen können sich von Universität zu Universität beträchtlich voneinander unterscheiden; es lohnt es sich also, diese Überlegung in in die Wahl des Studienortes einzubeziehen.

Es ist noch nicht lange her, da hat man an einer Universität einfach Mathematik studiert. Das können Sie heute auch noch, und die Mehrzahl unserer Studierenden tut das auch. Aber darüber hinaus gibt es eine Vielzahl von speziellen Studiengängen im Angebot, die auf einen bestimmten Schwerpunkt hin ausgerichtet sind, z.B. Finanzmathematik, Wirtschaftsmathematik, Technomathematik, Computerscience, Biomathematik oder Statistik. In den ersten beiden Studienjahren unterscheiden sich diese Studiengänge in der Regel nicht wesentlich von einem allgemeinen Mathematikstudium, danach aber fokussieren sie zunehmend auf den angestrebten Schwerpunkt.

Im Zuge der Globalisierung bieten einige Fachbereiche auch Studiengänge an, die wenigstens in Teilen fremdsprachlich, meist englisch, angeboten werden. Sie sollen ausländischen Studierenden den Einstieg in ein Studium in Deutschland ermöglichen. Diese Studiengänge sind in der Regel natürlich auch für deutschsprachige Studierende offen, das kann eine interessante Alternative sein.

Qualitätskriterien

Natürlich wollen Sie an einer guten Fakultät studieren. Aber was ist "gut"? Im Zeitalter der Rankings wird häufig auch die Qualität einer Fakultät in ein eindimensionales Korsett gezwängt. Seriöse Rankings können einen ungefähren Eindruck von der Position einer Fakultät in der deutschen Hochschullandschaft vermitteln, aber auch nur im Hinblick auf die abgefragten Parameter. Die oben genannten Gesichtspunkte können oft nicht abgebildet werden, andere Parameter sind interpretationsbedürftig. So kann man aus dem häufig abgefragten Betreuungsverhältnis (Zahl der Studierenden je Dozent) durchaus verschiedene Schlüsse ziehen.

Berufsfelder für Mathematiker

Welche Perspektiven eröffnet die Mathematik? Außer meinen Mathematiklehrerinnen kenne ich eigentlich keine Mathematiker. Was kann man denn mit einem Mathematikstudium anfangen, und wie sind die Berufschancen? In kaum einem Fach sind die Berufschancen so vielfältig und so gut wie in der Mathematik. Mathematikerinnen und Mathematiker sind universell einsetzbar und füllen daher oft Stellen aus, die nach außen gar nicht als Mathematiker-Stellen erkennbar sind.

Mathematikerinnen und Mathematiker sind wie die Mathematik: unverzichtbar, aber schwer auszumachen. Juristen, Mediziner, Theologen und viele andere sind klar als solche erkennbar, oft schon aus dem Telephonbuch oder auf dem Namensschild. Wo nun sind die Mathematiker? Überall da, wo Mathematik ist und noch in vielen anderen Bereichen. Denn Mathematiker können Mathematik und noch viel mehr: sie können gedankliche Ordnung in unübersichtliche und komplexe Situationen bringen, z.B. indem sie analysieren, auf angemessene Weise vereinfachen, auf den Punkt bringen, intuitiv verstehen und dabei präzise bleiben. Letzteres zeichnet Mathematiker besonders aus: Mathematik erzieht zum genauen Denken: wenn es um hohe Sicherheit und Zuverlässigkeit geht, müssen alle, wirklich alle, Möglichkeiten durchdacht und berücksichtigt werden, nicht nur die Regelfälle, sondern auch die Ausnahmesituationen. Für alle diese Fähigkeiten werden Mathematikerinnen und Mathematiker gebraucht und eingestellt.

Technologie

Mathematik ist eine Schlüsselwissenschaft. Wo Hochtechnologie ist, ist auch Mathematik. Nehmen wir ein Auto: es beginnt bei der Gestaltung des Reifenprofils: griffg, aber leise sollen die Reifen sein. Die Karosserie soll windschlüpfrig sein, aber auch formschön; beides kann man mathematisch erfassen. Die Form der Karosserie muss mathematisch beschrieben werden, sonst wissen die Pressen nicht, was sie tun sollen. Das optimale Design der Vorgänge bei der Verbrennung im Zylinder führt mitten hinein in das hochaktuelle mathematische Gebiet der Turbulenz. Wenn neuerdings viele Crashtests zur Erhöhung der Sicherheit im Rechner durchgeführt werden können, dann ist das ein Verdienst der Mathematik: nur ausgeklügelte mathematische Verfahren erlauben es, solch komplizierte Vorgänge in kurzer Zeit zu rechnen, selbst auf schnellen Computern - Sie wissen ja, wie ein Auto nach einem Crash aussehen kann...

Wo immer es digital wird, z.B. beim GPS, wird es auch mathematisch. Digitale Information wird gegen Fehler gesichert, komprimiert, verschlüsselt, von anderer Information getrennt; dies alles mit mathematischen Algorithmen. Diese Liste ist jedoch noch längst nicht vollständig. Was für ein Auto gilt, gilt genauso für jedes anderes Produkt der modernen Technologie, für Flugzeuge und Züge, für Handys und Geldautomaten, für optische Geräte und moderne Werkstoffe, von der IT-Branche gar nicht zu reden. Natürlich werden diese Produkte nicht alleine von Mathematikern entwickelt, aber sie sind überall beteiligt, immer in einem Team, in welches sie ihre Fähigkeiten einbringen.

Finanzwelt

Ein klassisches Berufsfeld für Mathematikerinnen und Mathematiker sind Versicherungen und Banken. Produkte für den Finanzmarkt zu entwickeln, ist eine anspruchsvolle Angelegenheit, man spricht von Financial Engineering. Hier ist viel anspruchsvolle Mathematik im Spiel, spätestens seit F. Black, R.C. Merton und M. Scholes um 1973 mit ihren mathematischen überlegungen zur fairen Optionspreisbewertung die Finanzmärkte revolutionierten (die beiden letztgenannten erhielten dafür 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, F. Black starb 1995). Alle diese Produkte müssen natürlich auch überprüft werden: Controlling-Abteilungen sind ein mittlerweile klassisches Betätigungsfeld für Mathematiker: sie schauen genau hin.

Unternehmensberatung, Management, Logistik

Und dann gibt es noch die unzähligen Berufe, denen man den Bezug zur Mathematik gar nicht mehr ansieht. Hier bringen Mathematiker vor allem ihre analytischen Fähigkeiten und ihr strukturierendes Denken ein. Das gilt zunächst für alle Bereiche des mittleren und höheren Managements. Als weiteres typisches Beispiel seien hier Unternehmensberatungen genannt. In manchen großen Unternehmensberatungsfirmen haben etwa die Hälfte der Mitarbeiter ein abgeschlossenes Mathematikstudium in der Tasche. In naher Zukunft wird im Bereich der Verkehrssysteme ein großer Bedarf an Mathematikern entstehen. Schon jetzt sind Mathematiker in die Organisation von Nahverkehrssystemen und Fahrplänen eingebunden, manchmal leider auch nicht. Mathematikerinnen und Mathematiker werden gerne eingesetzt, wo immer komplizierte logistische Aufgaben zu bewältigen sind: Mathematik ist Organisation von Komplexität und genau hier wird sie gebraucht.

Lehre und Forschung

Die oben angesprochenen Berufsfelder belegen auch, wie wichtig die Mathematik für das Funktionieren unserer Welt ist. Diese Rolle kann sie in Zukunft nur ausfüllen, wenn einerseits in den Schulen ein breites Grundverständnis für Mathematik vermittelt wird und wenn andererseits die Mathematik ständig weiterentwickelt wird, um vorbereitet zu sein für neue Aufgaben. Lehrerinnen und Lehrer für Mathematik erfüllen daher eine wichtige Aufgabe für die Gesellschaft, sie sind immer gefragt. Die meisten Universitäten bieten auch Studiengänge für das gymnasiale Lehramt an, Mathematik in Kombination mit wenigstens einem weiteren Unterrichtsfach für die Schule. Mathematische Forschung findet hauptsächlich an den Universitäten, Max-Planck-Instituten und Forschungszentren großer Firmen statt. Die Stellen in der Forschung sind allerdings dünn gesät. Daher kann man sich eine Forschungslaufbahn vornehmen, aber darauf verlassen sollte man sich nicht.

Firmen brauchen Mathematiker

Die Berufsaussichten für Mathematikerinnen und Mathematiker sind also hervorragend. Alle Statistiken weisen einheitlich aus: jüngere Mathematiker gibt es unter den Langzeitarbeitslosen praktisch nicht. Die meisten Stellen werden nicht spezifisch für Mathematiker ausgeschrieben. Ein Blick auf die geforderten Qualifikationen zeigt aber oft: hier haben Mathematiker gute Chancen, und häufig setzen sie sich im Bewerbungsverfahren durch, denn die spezifischen Fähigkeiten und die flexiblen Einsatzmöglichkeiten von Mathematikern werden zunehmend geschätzt. Die Liste der angesprochenen Berufsfelder ist bei weitem nicht vollständig, sie kann nur einen ersten Eindruck von der universellen Einsatzfähigkeit von Mathematikerinnen und Mathematikern geben. Viele weitere Informationen finden Sie in dem unten zitierten Berufs- und Karriereplaner Mathematik 2006.

Mathematiker arbeiten im Team

Noch ein Wort zur Arbeitsumgebung: Ein Mathematiker arbeitet in aller Regel nicht alleine an einem Schreibtisch in der Ecke. Im Gegenteil sind Kommunikationsfähigkeit und Teamfähigkeit wichtige Qualifikationen für Mathematiker: Häufig werden Sie sich als einziger Mathematikerin in einem bunt zusammengewürfelten Team wiederfinden. Sie werden Anlaufstelle sein für alle Probleme, die auch nur im entferntesten nach Mathematik riechen. In vielen Fällen werden

Sie erst einmal das eigentliche Problem herausschälen müssen, um es dann möglichst zu lösen und anschließend die Lösung Ihren nichtmathematischen Kollegen in brauchbarer Form weiterzureichen.

Weitere Informationen zur Mathematik

Die vorangestellten Seiten sind bei weitem nicht alles, was zur Mathematik gesagt werden kann. Aber mit dem Wort "alles" muss man ja in der Mathematik behutsam umgehen. Die Texte sollen helfen, die richtigen Fragen zu stellen, denn die Antworten auf die wirklich wichtigen Fragen werden Sie am Ende für sich selbst finden müssen. Für weitere Informationen steht Ihnen zunächst das Internetportal der DMV, der Deutschen Mathematikervereinigung, unter der Adresse www.mathematik.de zur Verfügung

.

Literaturempfehlungen

Noch viele weitere nützliche und interessante Informationen rund um das Mathematikstudium sowie einen umfangreichen Einblick in Berufsfelder für Mathematikerinnen und Mathematiker finden Sie in dem Buch:

Berufs- und Karriereplaner Mathematik 2006 Für Studierende und Hochschulabsolventen; Vieweg 2006; ISBN 3-8348-0137-2

Oft werde ich als Mathematiker gefragt: "Gibt es denn in der Mathematik noch Neues?" Die Antwort ist einfach: "Ja, jeden Monat mehrere Meter Zeitschriften mit neuer Mathematik." Jedes gelöste Problem wirft neue Fragen auf, da die Gesellschaft die sichere Beherrschung immer komplexerer Systeme verlangt. Auf die Lösung von sieben großen mathematischen Problemen wurden im Jahr 2000 je eine Million Dollar Preisgeld ausgesetzt.

Mehr Informationen finden Sie unter:

http://de.wikipedia.org/wiki/Millennium-Probleme oder auch in Pierre Basieux: Die Top Seven der mathematischen Vermutungen, rororo, ISBN 978-3-499-61932-8

Das Thema "Was ist Mathematik" ist unerschöpflich. In der folgenden kleinen Literaturauswahl finden Sie weitere Informationen.

- *Philip J. Davis, Reuben Hersh: Erfahrung Mathematik. Birkhäuser 1994.*
- *Albrecht Beutelspacher: In Mathe war ich immer schlecht. Vieweg 2001.*
- *Helmut Neunzert, Bernd Rosenberger: Schlüssel zur Mathematik. Econ Verlag 1991.*
- *Martin Aigner, Ehrhard Behrends (Hrg.): Alles Mathematik. Vieweg 2000.*
- *Artikel in Spektrum der Wissenschaft*

Auf den Homepages verschiedener Mathematischer Fakultäten und Fachbereiche werden Sie ebenfalls weitere Informationen erhalten (übrigens: Mathematische Fachbereiche und Mathematische Fakultäten sind dasselbe. Die Namensgebung ist durch das jeweilige Landeshochschulgesetz vorgegeben).

Doch schließlich: “Grau, mein Freund, ist alle Theorie und grün des Lebens goldner Baum“: Kein noch so wohlgemeinter Text kann das Gespräch mit Studierenden, Lehrenden und Mathematikern im Berufsleben ersetzen. Suchen Sie das persönliche Gespräch, denn eine wichtige Eigenschaft von Mathematikerinnen und Mathematikern habe ich bisher verschwiegen: Sie sind stolz auf ihr Fach und freuen sich über Gelegenheiten, darüber zu berichten.